

X-96-057043-7

I. S. E. G.	
E.	Biblioteca
1724-G.	45117

HA30.3.M37 1997

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA À ECONOMIA E GESTÃO

Modelos Vectoriais ARMA

- Estudo e Potencialidades -

Carla Alexandra Lopes Martinho

Orientação: Professor Doutor Daniel Müller

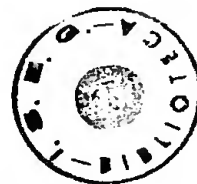
Juri:

Presidente: Professor Doutor Bento José Murteira

Vogais: Professor Doutor Kamil Feridum Turkman
Professor Doutor Daniel Müller

Ano lectivo 96/97

Resumo



Neste trabalho vai-se proceder ao estudo e à aplicação prática sobre sucessões cronológicas reais dos modelos vectoriais ARMA. Estes modelos generalizam os modelos univariados ARMA e os modelos multivariados de função transferência, tendo vantagem sobre estes últimos porque permitem a análise conjunta de sucessões cronológicas que apresentam efeito de *feedback*.

É de esperar que a modelação conjunta de sucessões potencie a capacidade de as descrever, obtendo-se ganhos significativos em termos previsionais. Deste modo, proceder-se-á ao estudo, com base na análise de dois exemplos concretos, do comportamento dos modelos vectoriais ARMA, confrontando-os com os resultados obtidos pelos modelos univariados e pelos modelos de função transferência.

Palavras chave: séries cronológicas multivariadas, matriz de correlação, função matriz de correlação parcial desfasada, identificação, modelos vectoriais ARMA, estimação, previsão.



Abstract

The aim of this work is to present the methodology of the vectorial ARMA models applied to real time series. These models are generalisations of the univariate ARMA models and of the multivariate transfer function models. The advantage of the vectorial ARMA modelling is to allow the joint analysis of the time series which exhibit feedback effects.

It is our intention to show that this joint modelization increases the capacity of describing and forecasting. The application was made with the use of two real examples comparing the results from the vectorial ARMA, the univariate and the transfer function modelling.

Key words: multivariate time series, correlation matrix, partial lag correlation matrix function, identification, vectorial ARMA models, estimation, forecasting.

Agradecimentos

Ao Professor Doutor Daniel Müller, é devido um profundo e sincero agradecimento pela forma empenhada com que acompanhou, orientou e motivou a elaboração deste trabalho. A disponibilidade permanente, o interesse demonstrado pelo assunto abordado e a qualidade das sugestões propostas, associados a uma vasta experiência no domínio da problemática social, são um apoio indispensável para quem se inicia em actividades de investigação.

Ao João, que com muita paciência soube, de forma simpática, ajudar a superar os momentos difíceis que surgiram na elaboração deste trabalho, incentivando a conclusão do mesmo, no período estabelecido.

A todos os colegas, amigos e familiares, que sempre me apoiaram e aos quais endereço uma nota de grande estima.

Aos meus pais, cujo apoio foi sempre incondicional e imprescindível.

Índice

Introdução

Capítulo 1 - Processos Estocásticos Multivariados Estacionários	3
1.1 - Processos Estocásticos Multivariados	3
1.2 - Processos Estocásticos Multivariados Estacionários	4
1.3 - Matrizes de Covariância e Correlação	6
1.4 - Matriz de Autoregressão Parcial	9
1.5 - Função Matriz de Correlação Parcial Desfasada	12
1.6 - Estimação da Média	17
1.7 - Estimação da Matriz de Correlação	18
1.8 - Estimação da Matriz de Autoregressão Parcial	19
1.9 - Estimação da Matriz de Correlação Parcial Desfasada	21
 Capítulo 2 - Processos Vectoriais ARMA	 23
2.1- Processo Vectorial de Ruído Branco	23
2.2- Representação VAR e VMA	25
2.3- Processos Vectoriais Médias Móveis de 1ª Ordem [VMA (1)]	28
2.4- Processos Vectoriais Médias Móveis de Ordem q [VMA (q)]	32
2.5- Processos Vectoriais Autoregressivos de 1ª Ordem [VAR (1)]	34
2.6- Processos Vectoriais Autoregressivos de Ordem p [VAR (p)]	36

2.7- Processos Vectoriais Mistos Autoregressivos e de Médias Móveis

[VARMA (1,1)] 38

2.8- Processos Vectoriais Mistos Autoregressivos e de Médias Móveis

[VARMA (p, q)] 39

2.9- Processos VARMA Não Estacionários 40**2.10- Processos VARMA e Modelo de Função Transferência** 42**Capítulo 3 - Modelização VARMA** 46**3.1- Estacionarização da Sucessão Cronológica** 47**3.2- Identificação** 48**3.3- Estimação e Avaliação do Diagnóstico** 51**Capítulo 4 - Previsão** 56**Capítulo 5 - Aplicações** 60**5.1- Exemplo 1** 61**5.1.1 Modelização Univariada** 66**5.1.1.1 Índice de produção da indústria transformadora** 66**5.1.1.2 Volume de vendas de gasolina** 69**5.1.2 Modelo de função transferência** 70**5.1.2.1 Estimação e avaliação do diagnóstico** 74



5.1.3 Modelização ARMA vectorial	80
5.2- Exemplo 2	89
Conclusão	95
Bibliografia	96

Lista de Figuras

Figura 1 - Cronograma da sucessão original, Y_t	62
Figura 2 - Cronograma da sucessão transformada, Z_t	62
Figura 3 - FAC da sucessão transformada, Z_t	63
Figura 4 - FACP da sucessão transformada, Z_t	63
Figura 5 - Cronograma da sucessão original, X_t	64
Figura 6 - Cronograma da sucessão transformada, W_t	64
Figura 7 - FAC da sucessão transformada, W_t	65
Figura 8 - FACP da sucessão transformada, W_t	65
Figura 9 - FAC da série residual do modelo SARIMA $(0,1,1)(2,1,0)_{12}$	67
Figura 10 - FACP da série residual do SARIMA $(0,1,1)(2,1,0)_{12}$	68
Figura 11 - Correlograma da FCC-lag positivos	72
Figura 12 - Correlograma da FCC-lag negativos	73
Figura 13 - FAC da série <i>noise</i>	73
Figura 14 - FACP da série <i>noise</i>	74
Figura 15 - FAC da série residual	77
Figura 16 - FACP da série residual	77
Figura 17 - FCC entre o <i>input</i> e os resíduos (lag positivos)	78
Figura 18 - FCC entre o <i>input</i> e os resíduos (lag negativos)	78
Figura 19 - Cronograma conjunto das séries de W_g e IPIT	81
Figura 20 - Cronograma da sucessão original, I_t	89
Figura 21 - Cronograma da sucessão original, C_t	89
Figura 22 - Correlograma da FCC-lag positivos	90
Figura 23 - Correlograma da FCC-lag negativos	90

Lista de Quadros

Quadro 1 - FAC residual estimada - SARIMA (0,1,1)(2,1,0) ₁₂	67
Quadro 2 - FACP residual estimada - SARIMA (0,1,1)(2,1,0) ₁₂	68
Quadro 3 - Previsão simulada e erro absoluto, Y_t	69
Quadro 4 - <i>Time Series Identification</i>	70
Quadro 5 - <i>Time Series Estimation</i>	74
Quadro 6 - Previsão simulada e erro absoluto, Y_t	80
Quadro 7 - Matrizes de correlação estimadas	81
Quadro 8 - Função matriz de correlação parcial desfasada estimada	82
Quadro 9 - Estimação do modelo VARMA (3,3)	83
Quadro 10 - Matrizes de correlação estimadas da série residual do modelo VARMA (3,3)	84
Quadro 11 - Estimação do modelo VARMA (2,10)	85
Quadro 12 - Matrizes de correlação estimadas da série residual do modelo VARMA (2,10)	86
Quadro 13 - Previsão simulada e erro absoluto, Y_t	86
Quadro 14 - EQM	87
Quadro 15 - Erro absoluto percentual	87
Quadro 16 - Previsão simulada e erro absoluto, I_t	91
Quadro 17 - Matrizes de correlação estimadas	91
Quadro 18 - Função matriz de correlação parcial desfasada estimada	92
Quadro 19 - Estimação do modelo VARMA (2,1)	93
Quadro 20 - Estimação do modelo VAR (9)	93
Quadro 21 - Previsão simulada e erro absoluto, I_t	94
Quadro 22 - EQM	94
Quadro 23 - Erro absoluto percentual	94

Introdução

Neste trabalho vai-se proceder ao estudo e à aplicação prática sobre sucessões cronológicas reais dos modelos vectoriais ARMA. Estes modelos generalizam os modelos univariados ARMA, bem como os modelos multivariados de função transferência, possibilitando, tal como estes últimos, o tratamento conjunto de mais do que uma sucessão cronológica. Caso as sucessões digam respeito a fenómenos que se encontram relacionados entre si, é de esperar que a sua modelação conjunta potencie a capacidade de as descrever e, conseqüentemente, se obtenham ganhos significativos em termos previsionais. Além disso, a modelação ARMA vectorial tem vantagem sobre a modelação por função transferência, uma vez que permite a análise conjunta de sucessões cronológicas que apresentam efeito de *feedback*, que, como é sabido, não pode estar presente neste último tipo referido de modelos.

O recurso à generalização de resultados já estabelecidos é uma prática usual quando se pretende alcançar novos desenvolvimentos teóricos e os modelos ARMA vectoriais são bem ilustrativos de tal prática. No entanto, considerando que as diversas metodologias para a análise e previsão de sucessões cronológicas deverão ser avaliadas à luz do sucesso que produzem na resolução de problemas concretos, será interessante verificar se a generalização ARMA conduz a efeitos práticos relevantes.

Este trabalho tem como principal objectivo estudar o comportamento dos modelos vectoriais ARMA, confrontando-os com os resultados obtidos pelos modelos univariados



e pelos modelos de função transferência. Esta confrontação será realizada com base na qualidade, medida através do erro quadrático médio e do erro absoluto percentual, das previsões obtidas por cada um dos modelos sobre os últimos anos de observações.

O estudo que se propõe realizar será efectuado sobre dois exemplos concretos e as suas conclusões serão, como é evidente, apenas válidas no âmbito dos exemplos apresentados. Conclusões definitivas e mais consistentes sobre o comportamento dos modelos ARMA vectoriais no que diz respeito à qualidade das previsões, exigiriam uma análise detalhada sobre um grande número de sucessões simuladas e está fora do âmbito deste trabalho.

Os dois exemplos referidos analisam sucessões cronológicas bivariadas, que se distinguem pelo facto de no primeiro deles as duas sucessões observadas não apresentarem efeito de *feedback*, possibilitando a modelização por função transferência, enquanto no segundo este tipo de efeito se encontra presente.

O trabalho apresentado encontra-se estruturado da seguinte maneira: Nos capítulos 1 a 4 são expostos os principais resultados teóricos dos modelos ARMA vectoriais, a saber, no Capítulo 1 sobre processos vectoriais estacionários são introduzidos os conceitos de função matriz de correlação e de função matriz de correlação parcial desfasada; no Capítulo 2 estuda-se as diferentes classes de modelos VARMA, onde cada uma delas será caracterizada em termos daquelas funções matrizes; a identificação e a estimação dos modelos é tratada no Capítulo 3 e a previsão no Capítulo 4. Finalmente, o Capítulo 5 será dedicado às aplicações, constituído pelo estudo dos exemplos já mencionados.

Capítulo 1

Processos Estocásticos Multivariados Estacionários

1.1- Processos Estocásticos Multivariados

A definição de processo estocástico multivariado pode obter-se por generalização do conceito de processo estocástico univariado. Assim, matematicamente, um processo estocástico univariado é a colecção ordenada, finita ou infinita, de variáveis aleatórias, e escreve-se

$$\{Z_t: t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad \text{ou} \quad \{Z_t: t = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Neste caso diz-se que o processo tem parâmetro ou tempo discreto.

Quando se tem a colecção indexada $\{Z_t: t \in T\}$ onde $T = [0, +\infty[$ ou $T =]-\infty, +\infty[$, diz-se que o processo tem parâmetro ou tempo contínuo.

Em termos mais rigorosos, dado um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{A}, P) e um conjunto arbitrário T , processo estocástico é a função $Z(t, \omega)$, definida no produto cartesiano $T \times \Omega$, a qual, que para cada $t \in T$, é uma variável aleatória. Simbolicamente escreve-se,

$$\{Z(t, \omega): \omega \in \Omega, t \in T\}.$$

Para simplificar a notação é usual omitir ω e escrever,

$$\{Z_t: t \in T\} \quad \text{ou} \quad \{Z(t): t \in T\}.$$

Assim, e sendo esta última definição fácil de generalizar para o caso multivariado, define-se processo estocástico multivariado como um vector de processos estocásticos univariados:

$$\mathbf{Z}_t = (Z_{1,t}, Z_{2,t}, \dots, Z_{m,t})'.$$

1.2-Processos Estocásticos Multivariados Estacionários

Em termos gerais os processos estacionários traduzem a situação em que o sistema se apresenta num estado de equilíbrio estatístico, isto é, tem propriedades probabilísticas que são estáveis ou invariantes ao longo do tempo.

Considerem-se m processos estocásticos univariados estacionários até à 2ª ordem,

$\{Z_{i,t}, t \in T\}$ sendo $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ e $i = \{1, 2, \dots, m\}$, isto é:

- $E(Z_{i,t}^2) < \infty$

com valor esperado

- $E(Z_{i,t}) = \mu_i \quad \forall t \in T$

e respectiva função de autocovariância

- $\text{cov}(Z_{i,t}, Z_{i,t+k}) = E[(Z_{i,t} - \mu_i)(Z_{i,t+k} - \mu_i)] = \gamma_{ii}(K) \quad \forall t, t+k.$

Admite-se que a covariância entre os diferentes processos, a qual define a função de covariância cruzada entre $\{Z_{i,t}\}$ e $\{Z_{j,t}\}$, é tal que:

$$\text{cov}(Z_{i,t}, Z_{j,t+k}) = E[(Z_{i,t} - \mu_i)(Z_{j,t+k} - \mu_j)] = \gamma_{ij}(K) \quad \text{para} \quad \begin{cases} i, j = 1, \dots, m & i \neq j \\ k = 0, \pm 1, \dots \forall t. \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Nestas condições, um processo estocástico multivariado, diz-se estacionário até à 2ª ordem se:

- $E(Z_t) = E(Z_{t+k}) = \mu$
- $\text{cov}(Z_t, Z_{t+k}) = \Gamma(k)$

onde $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)'$ e $\Gamma(k) = [\gamma_{ij}(k)]$ é uma matriz $m \times m$.

Tal como sucedia no caso univariado, existem outros conceitos mais restritos de estacionaridade para processos multivariados, no entanto, utilizar-se-á ao longo do presente trabalho a definição de estacionaridade até à 2ª ordem por ser suficiente aos desenvolvimentos teóricos que nos propomos realizar. Com o objectivo de aliviar a exposição, passar-se-ão a designar por processos estacionários os processos estacionários até à 2ª ordem.

Note-se que a estacionaridade do processo multivariado implica que cada processo univariado seja estacionário. Contudo, um vector de processos univariados estacionários não é necessariamente um processo vectorial estacionário.

1.3- Matrizes de Covariância e Correlação

Como é sabido, o estudo no domínio tempo, no caso univariado, atribui papel preponderante às funções de autocovariância e autocorrelação. Assim, definem-se as respectivas matrizes para o caso multivariado, utilizando antes de mais, a notação matricial para representar um processo estocástico multivariado.

Seja $Z_t = (Z_{1,t}, Z_{2,t}, \dots, Z_{m,t})'$ $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ um processo vectorial m -dimensional de valores reais, estacionário, de valor médio, $E(Z_{i,t}) = \mu_i$ para cada $i=1,2, \dots, m$ e de função covariância cruzada $\gamma_{ij}(k)$ $i=1, \dots, m$ e $j=1, \dots, m$.

Consequentemente, temos o vector média

$$E(Z_t) = \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix} \quad (1.3.1)$$

e matriz de covariância

$$\begin{aligned} \Gamma(k) &= \text{cov}(Z_t, Z_{t+k}) = E[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)'] = \\ &= E \begin{bmatrix} Z_{1,t} - \mu_1 \\ Z_{2,t} - \mu_2 \\ \vdots \\ Z_{m,t} - \mu_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1,t+k} - \mu_1, \dots, Z_{m,t+k} - \mu_m \end{bmatrix}' = \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma_{11}(k) & \gamma_{12}(k) & \dots & \gamma_{1m}(k) \\ \gamma_{21}(k) & \gamma_{22}(k) & \dots & \gamma_{2m}(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{m1}(k) & \gamma_{m2}(k) & \dots & \gamma_{mm}(k) \end{bmatrix} = \text{cov}(Z_{t-k}, Z_t) \quad (1.3.2)$$

onde $\gamma_{ij}(k)$ é a covariância cruzada, definida em (1.2.1).

Como função de k , $\Gamma(k)$ é chamada função covariância matricial ou matriz função de covariância para o processo vectorial Z_t . Para $i=j$, $\gamma_{ii}(k)$ é a função de autocovariância para a i -ésima componente do processo $Z_{i,t}$, para $i \neq j$, $\gamma_{ij}(k)$ é a função de autocovariância-cruzada entre $Z_{i,t}$ e $Z_{j,t}$. A matriz $\Gamma(0)$ é facilmente vista como a matriz de variância-covariância do processo.

A função matriz de correlação para o processo vectorial é definida por

$$\rho(k) = D^{-1/2} \Gamma(k) D^{-1/2} = [\rho_{ij}(k)] \quad (1.3.3)$$

para $i=1, \dots, m$ e $j=1, \dots, m$, onde D é a matriz diagonal na qual o i -ésimo elemento da diagonal é a variância do i -ésimo processo;

$$D = \text{diag}[\gamma_{11}(0), \gamma_{22}(0), \dots, \gamma_{mm}(0)].$$

Claramente, o i -ésimo elemento da diagonal de $\rho(k)$, $\rho_{ii}(k)$ é a função de autocorrelação para a i -ésima série, $Z_{i,t}$ enquanto o elemento (i,j) de $\rho(k)$ é dado por



$$\rho_{ij}(k) = \frac{\gamma_{ij}(k)}{\sqrt{\gamma_{ii}(0)\gamma_{jj}(0)}} \quad (1.3.4)$$

que representa a função de correlação-cruzada entre $Z_{i,t}$ e $Z_{j,t}$.

Tal, como nas funções univariadas de autocovariância e autocorrelação, as matrizes de covariância e de correlação são semi-definidas positivas, isto é,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i' \Gamma(t_i - t_j) \alpha_j \geq 0 \quad (1.3.5)$$

e

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i' \rho(t_i - t_j) \alpha_j \geq 0 \quad (1.3.6)$$

quaisquer que sejam os instantes t_1, t_2, \dots, t_n para todo o vector real $\alpha_i, i=1, \dots, n$.

É importante referir uma vez que

$$\gamma_{ij}(k) = E(Z_{i,t} - \mu_i)(Z_{j,t+k} - \mu_j) = E(Z_{i,t+k} - \mu_i)(Z_{j,t} - \mu_j) = \gamma_{ji}(-k),$$

se tem

$$\begin{cases} \Gamma(k) = \Gamma'(-k) \\ \rho(k) = \rho'(-k) \end{cases} \quad (1.3.7)$$

donde resulta que $\gamma_{ij}(k) \neq \gamma_{ij}(-k)$ para $i \neq j$ e também $\Gamma(k) \neq \Gamma(-k)$.

Assim, podem reunir-se as principais propriedades das matrizes de covariância e correlação para um processo estocástico multivariado estacionário, (Brockwell e Davis, 1987, p. 393):

1. $\Gamma(k) = \Gamma'(-k)$; $\rho(k) = \rho'(-k)$
2. $|\gamma_{ij}(k)| \leq [\gamma_{ii}(0)\gamma_{jj}(0)]^{1/2}$; $|\rho_{ij}(k)| \leq [\rho_{ii}(0)\rho_{jj}(0)]^{1/2}$ $i, j = 1, 2, \dots, m$
3. $\sum_{i,j=1}^n \alpha_i' \Gamma(t_i - t_j) \alpha_j \geq 0$; $\sum_{i,j=1}^n \alpha_i' \rho(t_i - t_j) \alpha_j \geq 0$
4. $\gamma_{ii}(k)$ é uma função de autocovariância : $\rho_{ii}(k)$ é uma função de autocorrelação.

1.4-Matriz de Autoregressão Parcial

Como se sabe, no caso univariado a autocorrelação parcial entre Z_t e Z_{t+k} , ϕ_{kk} , é igual ao valor do último coeficiente da regressão linear múltipla de Z_{t+k} sobre $Z_{t+k-1}, Z_{t+k-2}, \dots, Z_{t+1}, Z_t$, ie,

$$Z_{t+k} = \phi_{k1}Z_{t+k-1} + \phi_{k2}Z_{t+k-2} + \dots + \phi_{kk}Z_t + \xi_{t+k}. \quad (1.4.1)$$

Analogamente, Tiao e Box (1981) definem matriz de autoregressão parcial para o lag k , ou correlação parcial, denominada por $\mathcal{P}(k)$, como sendo a última matriz de parâmetros, Φ_{kk} , na regressão:

$$Z_{t+k} = \Phi_{k,1}Z_{t+k-1} + \Phi_{k,2}Z_{t+k-2} + \dots + \Phi_{k,k}Z_t + \varepsilon_{k,t+k} \quad (1.4.2)$$

onde $\varepsilon_{k,t+k}$ é o termo residual da regressão, vector $(m \times 1)$, e $\Phi_{k,s}$ $s=1, \dots, k$ são matrizes parâmetros $(m \times m)$ que minimizam

$$E\left[\left|Z_{t+k} - \Phi_{k,1}Z_{t+k-1} - \Phi_{k,2}Z_{t+k-2} - \dots - \Phi_{k,k}Z_t\right|^2\right]. \quad (1.4.3)$$

Esta definição é uma extensão directa de Box e Jenkins (1976, p.64).

Multiplicando (1.4.2) por Z_{t+p} , $p = 1, \dots, k-1$, depois de transposto, e tomando o seu valor esperado resulta:

$$E(Z_{t+p}Z'_{t+k}) = E(Z_{t+p}Z'_{t+k-1})\Phi'_{k,1} + E(Z_{t+p}Z'_{t+k-2})\Phi'_{k,2} + \dots + E(Z_{t+p}Z'_t)\Phi'_{k,k}$$

isto é

$$\begin{bmatrix} \Gamma(0) & \Gamma'(1) & \dots & \Gamma'(k-1) \\ \Gamma(1) & \Gamma(0) & \dots & \Gamma'(k-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma(k-1) & \Gamma(k-2) & \dots & \Gamma(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi'_{k,1} \\ \Phi'_{k,2} \\ \vdots \\ \Phi'_{k,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma(1) \\ \Gamma(2) \\ \vdots \\ \Gamma(k) \end{bmatrix} \quad (1.4.4)$$

A definição de Tiao e Box obriga à resolução das equações (1.4.4) em ordem a Φ'_{kk} e o cálculo da matriz de autoregressão parcial requer a resolução das mesmas equações para as sucessivas ordens de k .

Se $k \geq 2$ tem-se

$$A(k) = \begin{bmatrix} \Gamma(0) & \Gamma'(1) & \dots & \Gamma'(k-2) \\ \Gamma(1) & \Gamma(0) & \dots & \Gamma'(k-3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma(k-2) & \Gamma(k-3) & \dots & \Gamma(0) \end{bmatrix}$$

$$b(k) = \begin{bmatrix} \Gamma'(k-1) \\ \Gamma'(k-2) \\ \vdots \\ \Gamma'(1) \end{bmatrix} \quad c(k) = \begin{bmatrix} \Gamma(1) \\ \Gamma(2) \\ \vdots \\ \Gamma(k-1) \end{bmatrix} \quad \Phi'_*(k-1) = \begin{bmatrix} \Phi'_{k,1} \\ \Phi'_{k,2} \\ \vdots \\ \Phi'_{k,k-1} \end{bmatrix} \quad (1.4.5)$$

assim, o sistema (1.4.4) pode ser escrito,

$$\begin{bmatrix} A(k) & b(k) \\ b'(k) & \Gamma(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi'_*(k-1) \\ \Phi'_{k,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(k) \\ \Gamma(k) \end{bmatrix}$$

sendo

$$A(k)\Phi'_*(k-1) + b(k)\Phi'_{k,k} = c(k) \quad (1.4.6)$$

$$b(k)\Phi'_*(k-1) + \Gamma(0)\Phi'_{k,k} = \Gamma(k).$$

Resultando da primeira equação de (1.4.6)

$$\Phi'_*(k-1) = [A(k)]^{-1} c(k) - [A(k)]^{-1} b(k)\Phi'_{k,k}$$

e conseqüentemente

$$\Phi'_{k,k} = [\Gamma(0) - b'(k)A(k)^{-1}b(k)]^{-1} [\Gamma(k) - b'(k)A(k)^{-1}c(k)]. \quad (1.4.7)$$

Tem-se então a matriz de autoregressão parcial ou matriz de correlação parcial definida como se segue :

$$\mathcal{P}(k) = \begin{cases} \Gamma'(1)\Gamma(0)^{-1} & k = 1 \\ [\Gamma'(k) - c'(k)A^{-1}(k)b(k)][\Gamma(0) - b'(k)A^{-1}(k)b(k)]^{-1} & k > 1. \end{cases} \quad (1.4.8)$$

Considere-se o modelo bivariado

$$\mathbf{Z}_{t+2} = \Phi_{21}\mathbf{Z}_{t+1} + \Phi_{22}\mathbf{Z}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_{2,t+2}$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} Z_{1,t+2} \\ Z_{2,t+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{21}^{11} & \phi_{21}^{12} \\ \phi_{21}^{21} & \phi_{21}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1,t+1} \\ Z_{2,t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{22}^{11} & \phi_{22}^{12} \\ \phi_{22}^{21} & \phi_{22}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{2,t+2}^1 \\ \varepsilon_{2,t+2}^2 \end{bmatrix}$$

ou equivalentemente

$$Z_{1,t+2} = \phi_{21}^{11}Z_{1,t+1} + \phi_{21}^{12}Z_{2,t+1} + \phi_{22}^{11}Z_{1,t} + \phi_{22}^{12}Z_{2,t} + \varepsilon_{2,t+2}^1$$

$$Z_{2,t+2} = \phi_{21}^{21}Z_{1,t+1} + \phi_{21}^{22}Z_{2,t+1} + \phi_{22}^{21}Z_{1,t} + \phi_{22}^{22}Z_{2,t} + \varepsilon_{2,t+2}^2$$

Como facilmente se observa ϕ_{22}^{11} e ϕ_{22}^{22} não representam as FACP para $k=2$ dos processos

$Z_{1,t}$ e $Z_{2,t}$ respectivamente. No entanto se tomarmos $m=1$ (vector unidimensional)

$\phi_{22} = \phi_{22}^{11}$ representa a FACP para $k=2$.

1.5-Função Matriz de Correlação Parcial Desfasada

No caso dos modelos univariados a função de autocorrelação parcial, ϕ_{kk} , representa a correlação entre X_t e X_{t+k} depois de removida a dependência linear dos termos intermédios $X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+k-1}$ e coincide com o coeficiente de regressão associado a X_t quando se estabelece o modelo de regressão linear múltipla de X_{t+k} sobre X_{t+k-1}, \dots, X_t (ver Wei [1990], pag 12-15), isto é,

$$X_{t+k} = \phi_{k1}X_{t+k-1} + \dots + \phi_{kk}X_t + \varepsilon_t$$

e

$$\phi_{kk} = \frac{\text{cov}[(X_t - \hat{X}_t), (X_{t+k} - \hat{X}_{t+k})]}{\sqrt{\text{var}(X_t - \hat{X}_t)\text{var}(X_{t+k} - \hat{X}_{t+k})}}$$

onde

$$\hat{X}_t = \alpha_1 X_{t+1} + \dots + \alpha_{k-1} X_{t+k-1}$$

$$\hat{X}_{t+k} = \beta_1 X_{t+k-1} + \dots + \beta_{k-1} X_{t+1}$$

representam, respectivamente, a melhor estimativa linear de X_t e X_{t+k} no sentido dos mínimos quadrados.

Ora acontece que, tal como foi constatado no parágrafo anterior, os elementos da matriz de autoregressão parcial $\mathcal{P}(k)$ não se comportam como verdadeiros coeficientes de correlação.

Nestas circunstâncias Heyse e Wei (1985 a e b) estenderam a definição de FACP ao caso vectorial, deduzindo a matriz de correlação entre Z_t e Z_{t+k} depois de removida a dependência linear dos vectores intermédios $Z_{t+1}, Z_{t+2}, \dots, Z_{t+k-1}$. Ou seja, estes autores definem os vectores residuais:

$$u_{k-1,t+k} = Z_{t+k} - \alpha_{k-1,1}Z_{t+k-1} - \dots - \alpha_{k-1,k-1}Z_{t+1} = \begin{cases} Z_{t+k} - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{k-1,j}Z_{t+k-j} & k \geq 2 \\ Z_{t+1} & k = 1 \end{cases} \quad (1.5.1)$$

$$\mathbf{v}_{k-1,t} = \mathbf{Z}_t - \beta_{k-1,1}\mathbf{Z}_{t+1} - \dots - \beta_{k-1,k-1}\mathbf{Z}_{t+k-1} = \begin{cases} \mathbf{Z}_t - \sum_{j=1}^{k-1} \beta_{k-1,j}\mathbf{Z}_{t+j} & k \geq 2 \\ \mathbf{Z}_t & k = 1 \end{cases} \quad (1.5.2)$$

onde as matrizes coeficientes de regressão $\alpha_{k-1,j}$ e $\beta_{k-1,j}$ ($j=1, \dots, k-1$) minimizam

respectivamente $E\left[\left|\mathbf{u}_{k-1,t+k}\right|^2\right]$ e $E\left[\left|\mathbf{v}_{k-1,t}\right|^2\right]$. Em seguida, designando

$$V_u(k) = \text{var}(\mathbf{u}_{k-1,t+k})$$

$$V_v(k) = \text{var}(\mathbf{v}_{k-1,t})$$

$$\text{cov}(\mathbf{v}_{k-1,t}, \mathbf{u}_{k-1,t+k}) = V_{vu}(k),$$

introduzem o conceito de função matriz de correlação parcial desfasada no lag k

$$P(k) = \left[D_v(k) \right]^{-1} V_{vu}(k) \left[D_u(k) \right]^{-1} \quad (1.5.3)$$

em que $D_v(k)$ e $D_u(k)$ representam, respectivamente, as matrizes diagonais onde o i -ésimo elemento da diagonal corresponde à raiz quadrada do i -ésimo elemento da diagonal de $V_v(k)$ e $V_u(k)$.

Prova-se (Wei [1990]) que estas matrizes podem ser explicitadas em termos da matriz de covariância $\Gamma(k)$, vindo

$$V_{vu}(k) = \Gamma(k) - b'(k)\alpha'(k) \quad (1.5.4)$$

$$V_v(k) = \Gamma(0) - \beta(k)b(k) \quad (1.5.5)$$

$$V_u(k) = \Gamma(0) - \alpha(k)c(k) \quad (1.5.6)$$

onde $b(k)$ e $c(k)$ são dados por (1.4.4) e $\alpha(k)$ e $\beta(k)$ tais que

$$\alpha'(k) = [A(k)]^{-1} c(k) \quad (1.5.7)$$

$$\beta'(k) = [A(k)]^{-1} b(k) \quad (1.5.8)$$

com $A(k)$ definido em (1.4.4).

Para $k > 1$ tem-se de (1.4.8)

$$\mathcal{P}(k) = [\Gamma'(k) - c'(k)A^{-1}(k)b(k)][\Gamma(0) - b'(k)A^{-1}(k)b(k)]^{-1}$$

e sabe-se de (1.5.7) e (1.5.8) respectivamente, que $\alpha(k) = c'(k)[A(k)]^{-1}$ e $\beta(k) = b'(k)[A(k)]^{-1}$, donde por (1.5.4) e (1.5.5) a matriz de autoregressão parcial definida em (1.4.8), resulta:

$$\boxed{\mathcal{P}(k) = V'_{uu}(k)[V_v(k)]^{-1}} \quad (1.5.9)$$

Por comparação entre (1.5.3) e (1.5.9), $P(k)$ e $\mathcal{P}(k)$ pode verificar-se que:

1. As funções $P(k)$ e $\mathcal{P}(k)$ têm para os processos autoregressivos um corte brusco para zero. Pois

$$P(k) = \mathcal{P}(k) = 0 \quad \text{sse} \quad V_{uu}(k) = 0.$$

2. A matriz função de correlação parcial desfazada, $P(k)$, e a matriz de autoregressão parcial, $\mathcal{P}(k)$, são iguais no caso univariado. Pois, para $m = 1$, a matriz $A(k)$ de (1.4.5) é simétrica, visto os seus elementos serem escalares, e $\alpha'(k)$ e $\beta'(k)$ serem também vectores escalares.

Assim, de (1.5.7) e (1.5.8) resulta:

$$\alpha_{k-1,s} = \beta_{k-1,s}, \quad \text{para } s=1,2, \dots, k-1$$

$$V_u(k) = V_v(k)$$

vindo

$$P(k) = \frac{V_{vu}(k)}{V_v(k)} = \mathcal{P}(k)$$

3. Para $m > 1$, as matrizes $P(k)$ e $\mathcal{P}(k)$ não são iguais, pois a primeira é uma matriz de coeficientes da regressão entre Z_t e Z_{t+k} , depois de removida a dependência de $Z_{t+1}, \dots, Z_{t+k-1}$, enquanto a segunda entra em consideração com estes instantes, daí o seu nome de matriz de autoregressão.
4. Para $k=1$ a matriz de correlação parcial para o lag 1, $P(1)$, não é mais do que a matriz de correlação para o mesmo lag, $\rho(1)$, uma vez que não existem instantes intermédios na regressão de Z_t em Z_{t+1} . Para a matriz de autoregressão parcial $\mathcal{P}(k)$, o mesmo só se verifica no caso univariado.

1.6-Estimação da Média

Os processos estacionários caracterizam-se pelos respectivos parâmetros, nomeadamente a média e as matrizes de covariância e de correlação.

Em geral, nas aplicações em que se procura fazer inferência sobre o processo que gerou a sucessão observada, tem capital importância a estimação daqueles parâmetros.

Considera-se em primeiro lugar a média $E(Z_t) = \mu$. Dispondo-se de uma única realização Z_1, Z_2, \dots, Z_n que constituem a série cronológica, o estimador que naturalmente se impõe é,

$$\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Z_t \quad (1.6.1)$$

porquanto a relação

$$E(\bar{Z}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E(Z_t) = \mu \quad (1.6.2)$$

mostra que é um estimador centrado ou não enviesado de μ .

Refira-se a propósito que o valor esperado de cada processo, μ_i $i=1,2,\dots,m$, é estimado pela média de cada série univariada:

$$\bar{Z}_i = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Z_{i,t} \quad (1.6.3)$$

A consistência de \bar{Z} resulta da consistência de cada uma das suas componentes, o que constitui um resultado estabelecido para o caso univariado, sendo assim possível estabelecer a seguinte proposição (Brockwell e Davis, 1987, p.396):

Seja $\{Z_t\}$ um processo estocástico multivariado estacionário, com valor esperado μ e matriz de covariância $\Gamma(k)$. Então, quando $N \longrightarrow \infty$, tem-se:

$$E\left[(\bar{Z} - \mu)'(\bar{Z} - \mu)\right] \longrightarrow 0 \quad \text{se} \quad \gamma_{ii}(N) \longrightarrow 0 \quad i = 1, \dots, m$$

1.7-Estimação da Matriz de Correlação

Dado o vector da série de n observações Z_1, Z_2, \dots, Z_n , podemos calcular a matriz da função de correlação amostral

$$\hat{\rho}(k) = [\hat{\rho}_{ij}(k)]$$

onde $\hat{\rho}_{ij}(k)$ é correlação cruzada entre a i-ésima e a j-ésima componente da série, definida por

$$\hat{\rho}_{ij}(k) = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (Z_{i,t} - \bar{Z}_i)(Z_{j,t+k} - \bar{Z}_j)}{\left[\sum_{t=1}^n (Z_{i,t} - \bar{Z}_i)^2 \sum_{t=1}^n (Z_{j,t} - \bar{Z}_j)^2 \right]^{1/2}} \quad (1.7.1)$$

sendo \bar{Z}_i e \bar{Z}_j as médias amostrais das correspondentes séries. Para um processo vectorial estacionário, Hannan (1970, p.228) mostrou que $\hat{\rho}(k)$ é um estimador



consistente assintoticamente normal distribuído. As expressões para a variância e covariância da correlação-cruzada amostral $\hat{\rho}_{ij}(k)$, cuja formulação é bastante pesada e complicada foram deduzidas por Bartlett (ver Wei, 1990). No entanto, quando as séries Z_t são ruídos brancos a aproximação assintótica de Bartlett da covariância vem simplificada

$$\text{cov}(\hat{\rho}_{ij}(k), \hat{\rho}_{ij}(k+s)) \cong \frac{1}{n-k}$$

$$\text{var}(\hat{\rho}_{ij}(k)) \cong \frac{1}{n-k}$$

Para grandes amostras $(n-k)$ é muitas vezes substituído por n nas expressões acima.

1.8-Estimação da Matriz de Autoregressão Parcial

Os estimadores amostrais de $\mathcal{P}(k)$ podem ser obtidos por substituição de $\Gamma(k)$ em (1.4.6), pela matriz de covariância amostral:

$$\hat{\Gamma}(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (\mathbf{Z}_t - \bar{\mathbf{Z}})(\mathbf{Z}_{t+k} - \bar{\mathbf{Z}})' \quad k=1,2,\dots \quad (1.8.1)$$

onde $\bar{\mathbf{Z}} = (\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \dots, \bar{Z}_n)'$ é o vector da média amostral.

Alternativamente, os estimadores de $\mathcal{P}(k)$ podem ser obtidos pelo ajustamento dos modelos vectoriais autoregressivos aumentando sucessivamente as ordens dos modelos de regressão linear multivariada.

Assim, escrevendo o modelo vectorial (1.4.2) na forma

$$Z'_t = r' + \sum_{j=1}^p Z'_{t-j} \Phi'_{k,j} + a'_t \quad (1.8.2)$$

onde r' é uma matriz constante e dadas n observações Z'_t , $t=p+1, \dots, n$, pode-se considerar o modelo de regressão linear múltipla,

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad (1.8.3)$$

onde,

$$Y = \begin{bmatrix} Z'_{p+1} \\ \vdots \\ Z'_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & Z'_p & \cdots & Z'_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & Z'_{n-1} & \cdots & Z'_{n-p} \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} r' \\ \Phi'_1 \\ \vdots \\ \Phi'_p \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} a'_{p+1} \\ a'_{p+2} \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix}$$

Onde os a'_t 's, são processos de ruído branco com média nula e matriz de variância-covariância Σ .

Com base nesta última formulação são bem conhecidas as seguintes propriedades clássicas:

1. $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$ é conjuntamente normal multivariado, com média e matriz de variância-covariância:

- $E(\hat{\beta}) = \beta$
- $Var(\hat{\beta}) = \Sigma \otimes (X'X)^{-1}$ sendo \otimes o produto de Kronecker

2. O estimador de máxima verosimilhança para Σ é dado por $\hat{\Sigma} = \frac{1}{N} S(p)$, onde

$N=n-p$ e $S(p)$ é a soma dos quadrados dos resíduos ié

$$S(p) = \sum_{t=p+1}^N \left(Z_t - \hat{\tau} - \hat{\Phi}_1 Z_{t-1} - \dots - \hat{\Phi}_p Z_{t-p} \right) \left(Z_t - \hat{\tau} - \hat{\Phi}_1 Z_{t-1} - \dots - \hat{\Phi}_p Z_{t-p} \right)'$$

A matriz de variância-covariância estimada para $\hat{\beta}$ é $\hat{Var}(\hat{\beta}) = \hat{\Sigma} \otimes (X'X)^{-1}$.

Deste modo, podemos obter os estimadores de $\mathcal{P}(k)$ através do *software* estatístico para os modelos de regressão linear múltipla.

1.9-Estimação da Matriz de Correlação Parcial Desfasada

Os estimadores das matrizes de correlação parcial desfasada, $\hat{P}(k)$, são obtidos usando em $P(k)$ (1.5.3), $\hat{\Gamma}(j)$ em vez de $\Gamma(j)$, para $j=0,1, \dots, k-1$.

No entanto, Wei (1990, pgs 360/361) propõe um algoritmo recursivo para o cálculo de $P(k)$, que permitirá estabelecer o correspondente estimador $\hat{P}(k)$, substituindo as matrizes $\Gamma(j)$ pelos respectivos estimadores $\hat{\Gamma}(j)$. Este algoritmo tem a seguinte forma:

- Para $k=1$

$$V_u(1) = V_v(1) = \Gamma(0)$$

$$V_{vu}(1) = \Gamma(1)$$

$$\alpha_{1,1} = \Gamma'(1)[\Gamma(0)]^{-1}$$

$$\beta_{1,1} = \Gamma(1)[\Gamma(0)]^{-1}$$

- Para $k \geq 2$, com $s = 1, \dots, k-1$

$$V_u(k) = \Gamma(0) - \sum_{s=1}^{k-1} \alpha_{k-1,s} \Gamma(s)$$

$$V_v(k) = \Gamma(0) - \sum_{s=1}^{k-1} \beta_{k-1,s} \Gamma'(s)$$

$$V_{vu}(k) = \Gamma(k) - \sum_{s=1}^{k-1} \Gamma(k-s) \alpha'_{k-1,s}$$

$$\alpha_{k,k} = V'_{vu}(k)[V_v(k)]^{-1}$$

$$\alpha_{k,s} = \alpha_{k-1,s} - \alpha_{k,k} \beta_{k-1,k-s}$$

$$\beta_{k,k} = V_{vu}(k)[V_u(k)]^{-1}$$

$$\beta_{k,s} = \beta_{k-1,s} - \beta_{k,k} \alpha_{k-1,k-s}$$

Capítulo 2

Processos Vectoriais ARMA

Neste capítulo, irá proceder-se à descrição de uma classe útil de modelos para modelização de séries cronológicas vectoriais, sem sazonalidade.

Estes modelos são facilmente generalizados para os casos onde exista componente periódica, sendo a sua generalização idêntica ao que se faz para o caso univariado.

Refira-se, ainda, que irá ser considerado ao longo desta apresentação, sem perda de generalidade, que o valor esperado do processo estocástico multivariado é o vector nulo.

2.1- Processo de Ruído Branco

Um processo $\{Z_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, diz-se ruído branco ou puramente aleatório multivariado, se for estacionário e a sua matriz de variância-covariância for da forma:

$$\Gamma(k) = E[Z_t Z_{t+k}'] = \begin{cases} \Sigma & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

onde Σ é uma matriz arbitrária $m \times m$, simétrica e definida positiva.

Embora os elementos de Z_t das diferentes séries sejam não correlacionados entre si para momentos diferentes, podem ser contemporaneamente correlacionados.

As matrizes $A(k)$, $b(k)$ e $c(k)$ de (1.4.5), para este processo têm a seguinte forma:

$$A(k) = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Sigma \end{bmatrix} \quad b(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad c(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz de autoregressão parcial é dada por (1.4.8):

$$\mathcal{P}(k) = \begin{cases} \Gamma'(1)\Gamma^{-1}(0) = 0 & k = 1 \\ [\Gamma'(k) - c'(k)A^{-1}(k)b(k)][\Gamma(0) - b^{-1}(k)A^{-1}(k)b(k)]^{-1} = 0 & k > 1 \end{cases}$$

vem na forma

$$\boxed{\mathcal{P}(k) = 0, \quad k \geq 1} \quad (2.1.2)$$

A matriz de autocorrelação parcial desfasada definida em (1.5.3), vem para este processo:

$$\boxed{P(k) = \begin{cases} \Sigma & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}} \quad (2.1.3)$$

2.2- Representação VAR e VMA

Um processo vectorial de dimensão m , estacionário Z_t , é um processo linear se puder ser escrito como combinação de vectores aleatórios de ruído branco, de dimensão m , ie

$$\boxed{Z_t = a_t + \Psi_1 a_{t-1} + \Psi_2 a_{t-2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k a_{t-k}} \quad (2.2.1)$$

onde $\Psi_0 = I$ é a matriz identidade $m \times m$, os Ψ_k 's são matrizes $m \times m$ e os a_t 's são vectores aleatórios m -dimensionais de ruído branco nulo.

Usando o operador atraso $B^k a_t = a_{t-k}$, o processo Z_t pode escrever-se de forma equivalente,

$$\boxed{Z_t = \Psi(B) a_t} \quad (2.2.2)$$

onde

$$\Psi(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k B^k$$

Diz-se, neste caso, que se trata de um processo linear geral ou da representação VMA(∞) do processo Z_t .

Tomando $\Psi_k = [\psi_{ij,k}]$ com $i,j=1,2, \dots, m$, onde,

$$\psi_{ij,0} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

pode escrever-se,

$$\Psi(B) = [\psi_{ij}(B)]$$

onde

$$\psi_{ij}(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{ij,k} B^k.$$

Para que o processo seja estacionário, exige-se que as matrizes coeficientes Ψ_k sejam somáveis i.é $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_{ij,k}^2 < \infty$ com $i=1,2, \dots, n$ e $j=1,2, \dots, m$. Aqui e no que se segue a soma infinita das variáveis aleatórias é definida como o limite da média quadrática das somas parciais finitas.

Seja Z_t o processo definido em (2.2.1) ou (2.2.2) tem-se que

$$E \left[\left(Z_t - \sum_{j=0}^n \Psi_j a_{t-j} \right)' \left(Z_t - \sum_{j=0}^n \Psi_j a_{t-j} \right) \right] \rightarrow 0 \text{ com } n \rightarrow \infty$$

Outra forma de expressar um processo vectorial é a representação autoregressiva, na qual se regrid Z_t nos seus valores passados

$$\boxed{Z_t = \Pi_1 Z_{t-1} + \Pi_2 Z_{t-2} + \dots + a_t = \sum_{k=1}^{\infty} \Pi_k Z_{t-k} + a_t} \quad (2.2.3)$$

ou utilizando o operador atraso $\Pi(B)Z_t = a_t$, onde $\Pi(B) = I - \sum_{k=1}^{\infty} \Pi_k B^k$ e os Π_k são

as matrizes coeficientes autoregressivos, $m \times m$.

Seja $\Pi_k = [\Pi_{ij,k}]$ com $i,j=1,2, \dots, m$

$$\Pi_{ij,0} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \text{i.é } \Pi_0 = I.$$

Tem-se, assim $\Pi(B) = [\Pi_{ij}(B)]$

onde $\Pi_{ij}(B) = \Pi_{ij,0} - \sum_{k=1}^{\infty} \Pi_{ij,k} B^k.$

O processo vectorial diz-se invertível se as matrizes de coeficientes autoregressivos são absolutamente somáveis, i.é $\sum_{k=0}^{\infty} |\Pi_{ij,k}| < \infty \quad \forall i,j$. Note-se que um processo invertível não é necessariamente estacionário.

No entanto, segundo Wei (1990), para que um processo vectorial, com representação autoregressiva, isto é, invertível, seja estacionário, exige-se que os zeros do determinante da matriz polinomial autoregressiva, denotado por $|\Pi(B)|$, estejam fora do círculo unitário, i.é $|\Pi(B)| \neq 0$ para $|B| \leq 1$.

Analogamente, um processo estacionário não é necessariamente invertível. Para que um processo vectorial, com representação de médias móveis, estacionário, seja invertível dos zeros do determinante da matriz polinomial MA, têm de estar fora do círculo unitário, i.é $|\Psi(B)| \neq 0$ para $|B| \leq 1$.

2.3-Processos Vectoriais Médias Móveis de 1ª Ordem [VMA(1)]



Sejam \mathbf{a}_t vectores de ruído branco nulo, de dimensão $(m \times 1)$ e matriz de covariância Σ , Z_t diz-se um processo vectorial médias móveis de 1ª ordem se admitir a representação,

$$\boxed{Z_t = \Theta_0 \mathbf{a}_t + \Theta_1 \mathbf{a}_{t-1}} \quad (2.3.1)$$

onde Θ_0 e Θ_1 são matrizes reais de dimensão $(m \times m)$. Habitualmente considera-se $\Theta_0 = I_m$.

Recorrendo ao operador atraso, os modelos vectoriais MA(1), também podem ser escritos na forma,

$$\boxed{Z_t = (I - \Theta B) \mathbf{a}_t} \quad \text{ou} \quad \boxed{Z_t = \Theta(B) \mathbf{a}_t} . \quad (2.3.2)$$

Para $m=2$, tem-se

$$\begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,t} \\ a_{2,t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,t-1} \\ a_{2,t-1} \end{bmatrix} . \quad (2.3.3)$$

A matriz função de covariância de Z_t , é

$$\begin{aligned} \Gamma(0) &= E(Z_t Z_t') = E[(\mathbf{a}_t - \Theta_1 \mathbf{a}_{t-1})(\mathbf{a}_t' - \mathbf{a}_{t-1}' \Theta_1')] = \\ &= E(\mathbf{a}_t \mathbf{a}_t') - E(\mathbf{a}_t \mathbf{a}_{t-1}' \Theta_1') - \Theta_1 E(\mathbf{a}_{t-1} \mathbf{a}_t') + \Theta_1 E(\mathbf{a}_{t-1} \mathbf{a}_{t-1}') \Theta_1' = \\ &= \Sigma + \Theta_1 \Sigma \Theta_1' \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

$$\begin{aligned}\Gamma(k) &= E(\mathbf{Z}_t \mathbf{Z}_{t+k}') = E[(\mathbf{a}_t - \Theta_1 \mathbf{a}_{t-1})(\mathbf{a}_{t+k}' - \mathbf{a}_{t+k-1}' \Theta_1')] = \\ &= \begin{cases} -\Sigma \Theta_1' & k = 1 \\ -\Theta_1 \Sigma & k = -1 \\ 0 & |k| > 1. \end{cases} \quad (2.3.5)\end{aligned}$$

Note-se que $\Gamma(-1) = \Gamma'(1)$, e que $\Gamma(k)$ tem um corte brusco para zero, nos *lag's* superiores a 1, comportamento idêntico ao processo MA(1) univariado.

A matriz função de correlação parcial desfasada dos VMA(1) pode ser calculada a partir de (1.5.3), sendo a sua dedução bastante fastidiosa. No entanto, pode afirmar-se que aquela matriz para os referidos processos não apresenta cortes bruscos para zero, representando este facto uma característica essencial para a identificação de tais processos.

O processo VMA(1) é claramente estacionário, e para que seja invertível, é necessário impor que os zeros de $|I - \Theta_1 B|$ estejam fora do círculo unitário, ou equivalentemente aos valores próprios de Θ_1 sejam todos menores que um em valor absoluto.

Sendo $\lambda = B^{-1}$, tem-se

$$|I - \Theta_1 B| = 0 \Leftrightarrow |\lambda I - \Theta_1| = 0.$$

Assim, os zeros de $|I - \Theta_1 B|$, são o inverso dos valores próprios de Θ_1 . Sendo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ os valores próprios e h_1, h_2, \dots, h_m os vectores próprios associados a Θ_1 , tem-se que

$$\Theta_1 h_i = \lambda_i h_i \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Para simplificar, assume-se que os vectores próprios são linearmente independentes.

Nestas condições, designando

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix}$$

e por H , a matriz $(m \times m)$ cujas colunas são componentes de cada um dos vectores próprios, isto é,

$$H = [h_1, h_2, \dots, h_m],$$

tem-se, pelas propriedades dos vectores próprios

$$\Theta_1 H = H \Lambda \quad \text{e} \quad \Theta_1 = H \Lambda H^{-1}.$$

Consequentemente, pode provar-se que,

$$|I - \Theta_1 B| = |I - H \Lambda H^{-1} B| = |I - H \Lambda B H^{-1}| = |I - \Lambda B| = \prod_{i=1}^m (1 - \lambda_i B)$$

Conclui-se, assim, que os zeros de $|I - \Theta_1 B|$ estão fora do círculo unitário se e só se todos os valores próprios λ_i estiverem dentro dele. Isto implica que pode definir-se a seguinte condição de invertibilidade para o processo vectorial MA(1):

Um processo vectorial médias móveis de 1ª ordem é invertível se os valores próprios de Θ_1 estiverem dentro do círculo unitário, ié, $|\lambda_i| < 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$.

Neste caso, verifica-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diag}[\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_m^n] = 0$$

resultando,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_1^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} H \Lambda H^{-1} \cdot H \Lambda H^{-1} \dots H \Lambda H^{-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} H \Lambda^n H^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I - \Theta_1 B) (I + \Theta_1 B + \Theta_1^2 B^2 + \dots + \Theta_1^{n-1} B^{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - \Theta_1^n B^n) = I,$$

o que implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I - \Theta_1 B)^{-1} = (I + \Theta_1 B + \Theta_1^2 B^2 + \dots),$$

ou seja,

$$(I - \Theta_1 B)^{-1} = (I + \Theta_1 B + \Theta_1^2 B^2 + \dots).$$

Conclui-se, assim, que um processo VMA(1) invertível assume a representação autoregressiva,

$$\mathbf{Z}_t + \sum_{k=1}^{\infty} \Theta_1^k \mathbf{Z}_{t-k} = \mathbf{a}_t,$$

onde Θ_1^k são matrizes que decrescem para a matriz nula à medida que k aumenta.

No caso em que os vectores próprios não são linearmente independentes a condição de invertibilidade mantém-se, $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \dots, m$, (ver Wei 1990).

2.4-Processos Vectoriais Médias Móveis de Ordem q [VMA(q)]

Um processo vectorial médias móveis de ordem q , VMA(q), é dado por:

$$\mathbf{Z}_t = \Theta_0 \mathbf{a}_t + \Theta_1 \mathbf{a}_{t-1} + \dots + \Theta_q \mathbf{a}_{t-q}, \quad (2.4.1)$$

onde $\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_q$ são matrizes reais e $\{\mathbf{a}_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ é um processo puramente aleatório multivariado. Aplicando em (2.4.1) o operador atraso, vem:

$$\mathbf{Z}_t = \left(I - \Theta_1 B - \dots - \Theta_q B^q \right) \mathbf{a}_t.$$

A matriz função de covariância destes processos vem,

$$\begin{aligned}
 \Gamma(k) &= E(Z_t Z'_{t+k}) = E\left[(I - \Theta_1 B - \Theta_2 B^2 - \dots - \Theta_q B^q) \mathbf{a}_t\right] \left[(I - \Theta_1 B - \Theta_2 B^2 - \dots - \Theta_q B^q) \mathbf{a}_{t+k}\right]' = \\
 &= E\left[\mathbf{a}_t - \Theta_1 \mathbf{a}_{t-1} - \dots - \Theta_q \mathbf{a}_{t-q}\right] \left[\mathbf{a}'_{t+k} - \mathbf{a}'_{t+k-1} \Theta'_1 - \dots - \mathbf{a}'_{t+k-1} \Theta'_q\right]' = \\
 &= \begin{cases} \sum_{j=0}^{q-k} \Theta_j \Sigma \Theta'_{j+k} & k = 0, 1, 2, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases} \quad (2.4.2)
 \end{aligned}$$

onde $\Theta_0 = I$ e $\Gamma(-k) = \Gamma'(k)$. Note-se que $\Gamma(k)$ se anula para os lag's superiores à ordem q do processo.

Os processos VMA(q) são sempre estacionários e se forem invertíveis, ie, se todos os zeros de $|\Theta_q(B)|$ estiverem fora do círculo unitário, pode escrever-se:

$$\Pi(B) Z_t = \mathbf{a}_t \quad (2.4.3)$$

com

$$\Pi(B) = [\Theta_q(B)]^{-1}.$$

As matrizes Π_k podem ser obtidos pela equação funcional:

$$\Pi(B) \Theta_q(B) = I \Leftrightarrow [I - \Pi_1 B - \Pi_2 B^2 - \dots] [I - \Theta_1 B - \dots - \Theta_q B^q] = I.$$

Tal como para os processos VMA(1), a matriz função de correlação parcial desfasada pode ser calculada recorrendo a (1.5.3) e não apresenta cortes bruscos para a matriz nula.

2.5-Processos Vectoriais Autoregressivos de 1ª Ordem [VAR(1)]

O modelo vectorial AR(1) é dado por,

$$\boxed{(I - \Phi_1 B)Z_t = a_t} \quad \text{ou} \quad \boxed{Z_t = \Phi_1 Z_{t-1} + a_t}. \quad (2.5.1)$$

Para $m=2$ vem,

$$\begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1,t-1} \\ Z_{2,t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,t} \\ a_{2,t} \end{bmatrix} \quad (2.5.2)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} Z_{1,t} &= \phi_{11} Z_{1,t-1} + \phi_{12} Z_{2,t-1} + a_{1,t} \\ Z_{2,t} &= \phi_{21} Z_{1,t-1} + \phi_{22} Z_{2,t-1} + a_{2,t}. \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

O processo vectorial AR(1) é claramente invertível. Para o processo ser estacionário os zeros da equação $|I - \Phi_1 B|$ têm de estar fora do círculo unitário, ou o que é equivalente, os vectores próprios de Φ_1 terão módulo inferior à unidade. Este resultado demonstra-se de forma análoga à que se fez para a invertibilidade do processo VMA(1).

Para os VAR(1) estacionários, pode escrever-se

$$\mathbf{Z}_t = [\Phi_1(B)]^{-1} \mathbf{a}_t = (I + \Phi_1 B)^{-1} \mathbf{a}_t = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_1^k \mathbf{a}_{t-k} \quad (2.5.4)$$

onde Φ_1^k é uma matriz que decresce para zero à medida que k aumenta.

A matriz função de covariância para o modelo VAR(1) é dada por

$$\begin{aligned} \Gamma(K) &= E(\mathbf{Z}_{t-k} \mathbf{Z}_t') = E \left[\mathbf{Z}_{t-k} (\Phi_1 \mathbf{Z}_{t-1} + \mathbf{a}_t)' \right] = E[\mathbf{Z}_{t-k} \mathbf{Z}_{t-1}' \Phi_1' + \mathbf{Z}_{t-k} \mathbf{a}_t'] = \\ &= \begin{cases} \Gamma(-1) \Phi_1' + \Sigma, & k = 0 \\ \Gamma(k-1) \Phi_1' = \Gamma(0) (\Phi_1')^k, & k \geq 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

uma vez que para $k \geq 1$, $E(\mathbf{Z}_{t-k} \mathbf{a}_t') = 0$.

A função matriz de correlação parcial desfasada vem para estes modelos nula a partir do 2º lag, como facilmente se pode verificar por (1.5.3).

Com efeito, verifica-se para $k=2$

$$P(2) = [D_v(2)]^{-1} V_{vu}(2) [D_u(2)]^{-1}$$

$$V(2) = \Gamma(2) - \Gamma(1) A^{-1}(2) d(2) = \Gamma(0) (\Phi_1')^2 - \Gamma(0) \Phi_1' \Gamma^{-1}(0) \Gamma(0) \Phi_1' = 0,$$

e demonstra-se do mesmo modo para os restantes lags $k \geq 2$ que $P(k)=0$.

2.6-Processos Vectoriais Autoregressivos de Ordem p [$VAR(p)$]

Em geral um processo vectorial $AR(p)$, representa-se por,

$$\boxed{Z_t = \Phi_1 Z_{t-1} + \dots + \Phi_p Z_{t-p} + a_t} \quad \text{ou} \quad \boxed{(I - \Phi_1 B - \dots - \Phi_p B^p) Z_t = a_t}. \quad (2.6.1)$$

Estes processos são sempre invertíveis. Para que seja estacionário requer-se que os zeros de $|I - \Phi_1 B - \dots - \Phi_p B^p|$ estejam fora do círculo unitário, ou de forma equivalente que as raízes de $|\lambda^p I - \lambda^{p-1} \Phi_1 - \dots - \Phi_p| = 0$ estejam dentro do círculo unitário. Neste caso, pode escrever-se que,

$$Z_t = [\Phi_p(B)^{-1}] a_t = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k a_{t-k}, \quad (2.6.2)$$

onde Ψ_k são pesos e podem obter-se resolvendo a seguinte equação funcional:

$$(I - \Phi_1 B - \dots - \Phi_p B^p)(I + \Psi_1 B + \Psi_2 B^2 + \dots) = I.$$

A matriz função de covariância obtém-se multiplicando (2.6.1), depois de transposto, por Z_{t-k} e tomando o seu valor esperado,

$$E \left[Z_{t-k} Z_t' (I - \Phi_1 B - \dots - \Phi_p B^p)' \right] = E [Z_{t-k} a_t']$$

$$E(Z_{t-k} Z_t') - E(Z_{t-k} Z_{t-1}') \Phi_1' - \dots - E(Z_{t-k} Z_{t-p}') \Phi_p' = E[Z_{t-k} a_t']. \quad (2.6.3)$$

Assim,

$$k=0 \quad \Gamma(0) - \Gamma'(1)\Phi'_1 - \Gamma'(2)\Phi'_2 - \dots - \Gamma'(p)\Phi'_p = \Sigma$$

$$k=1 \quad \Gamma(1) - \Gamma(0)\Phi'_1 - \Gamma'(1)\Phi'_2 - \dots - \Gamma'(p-1)\Phi'_p = 0$$

$$k=2 \quad \Gamma(2) - \Gamma(1)\Phi'_1 - \Gamma(0)\Phi'_2 - \dots - \Gamma'(p-2)\Phi'_p = 0$$

\vdots

$$k = p \quad \Gamma(p) - \Gamma(p-1)\Phi'_1 - \Gamma(p-2)\Phi'_2 - \dots - \Gamma(0)\Phi'_p = 0$$

$$k \geq p \quad \Gamma(k) - \Gamma(k-1)\Phi'_1 - \Gamma(k-2)\Phi'_2 - \dots - \Gamma(k-p)\Phi'_p = 0$$

onde 0 é a matriz nula $m \times m$. Obtêm-se, deste modo, as equações de Yule-Walker generalizadas, para $k = 1, \dots, p$,

$$\begin{bmatrix} \Gamma(0) & \Gamma'(1) & \Gamma'(2) & \dots & \Gamma'(p-1) \\ \Gamma(1) & \Gamma(0) & \Gamma'(1) & \dots & \Gamma'(p-2) \\ \vdots & & & & \vdots \\ \Gamma(p-1) & \Gamma(p-2) & \Gamma(p-3) & \dots & \Gamma(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi'_1 \\ \Phi'_2 \\ \vdots \\ \Phi'_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma(1) \\ \Gamma(2) \\ \vdots \\ \Gamma(p) \end{bmatrix} \quad (2.6.4)$$

De forma análoga à dos modelos VAR(1), a função matriz de correlação parcial desfasada apresenta-se nula para os lag k , com $k > p$.

2.7-Processos Vectoriais Mistos Autoregressivos e de Médias Móveis

$$[VARMA(1,1)]$$

O modelo vectorial ARMA(1,1) é dado por,

$$\boxed{(I - \Phi_1 B)Z_t = (I - \Theta_1 B)a_t} \quad \text{ou} \quad \boxed{Z_t - \Phi_1 Z_{t-1} = a_t - \Theta_1 a_{t-1}}. \quad (2.7.1)$$

O modelo é estacionário se os zeros da equação polinomial $|I - \Phi_1 B|$ estão fora do círculo unitário ou se todos os valores próprios de Φ_1 são inferiores a um. Neste caso, o processo admite a representação VMA(∞),

$$Z_t = \sum_{s=0}^{\infty} \Psi_s a_{t-s} \quad (2.7.2)$$

onde os pesos, Ψ_j , são obtidos resolvendo a equação funcional

$$(I - \Phi_1 B)(I + \Psi_1 B + \Psi_2 B^2 + \dots) = (I - \Theta_1 B). \quad (2.7.3)$$

De forma análoga, o processo será invertível se os zeros de $|I - \Theta_1 B|$ estiverem fora do círculo unitário, ou seja, se todos os valores próprios de Θ_1 forem inferiores em módulo a um. Neste caso, pode escrever-se,

$$Z_t = \Pi_1 Z_{t-1} + \Pi_2 Z_{t-2} + \dots + a_t,$$

onde os Π_k são obtidos através de resolução da equação funcional,

$$(I - \Phi_1 B) = (I - \Theta_1 B)(I + \Pi_1 B + \Pi_2 B^2 + \dots).$$

A matriz função de covariância obtém-se multiplicando (2.7.1), depois de transposto, por Z_{t-k} e tomando o seu valor esperado:

$$E[Z_{t-k}(Z'_t - Z'_{t-1}\Phi'_1)] = E[Z_{t-k}(a'_t - a'_{t-1}\Theta'_1)].$$

Note-se que,

$$E[Z_t(a'_{t-1}\Theta'_1)] = E[(\Phi_1 Z_{t-1} + a_t - \Theta_1 a_{t-1})(a'_{t-1}\Theta'_1)] = \Phi_1 \Sigma \Theta'_1 - \Theta_1 \Sigma \Theta'_1,$$

consequentemente obtém-se,

$$\Gamma(k) = \begin{cases} \Gamma(0) - \Gamma'(1)\Phi'_1 = \Sigma - (\Phi_1 - \Theta_1)\Sigma\Theta'_1 & k = 0 \\ \Gamma(1) - \Gamma(0)\Phi'_1 = -\Sigma\Theta_1 & k = 1 \\ \Gamma(k) - \Gamma(k-1)\Phi'_1 = 0 & k \geq 2. \end{cases} \quad (2.7.4)$$

donde se pode concluir que estes processos apresentam função matriz de correlação não nula e com um decaimento exponencial. Este comportamento típico, também se verificará para a matriz de correlação parcial desfasda.

2.8-Processos Vectoriais Mistos Autoregressivos e de Médias Móveis

$$[VARMA(p, q)]$$

O modelo vectorial ARMA(p, q) é dado por

$$\boxed{\Phi_p(B)Z_t = \Theta_q(B)a_t} \quad (2.8.1)$$

Encontram-se as condições de estacionaridade e invertibilidade por generalização óbvia das equivalentes ao do processo VARMA(1,1).

Assim, estas condições para o processo VARMA são que os determinantes $|\Phi_p(B)|$ e $|\Theta_p(B)|$ não tenham zeros dentro do círculo unitário. Um modelo VARMA é estacionário se o determinante da matriz polinomial AR é constante ou tem todos os zeros fora do círculo unitário. É invertível, se o determinante da matriz polinomial MA é uma constante ou tem todos os zeros fora do círculo unitário.

2.9-Processos VARMA Não Estacionários

Na análise de séries cronológicas é muito comum observar séries que não são estacionárias. Um dos caminhos para reduzir séries não estacionárias a estacionárias é por diferenciação. Por exemplo, uma série univariada não estacionária, Z_t , pode ser reduzida a uma série estacionária por aplicação do operador $(1-B)^d$ a Z_t , com $d > 0$, podendo escrever-se:

$$\phi_p(B)(1-B)^d Z_t = \theta_q(B)a_t,$$

onde $\phi_p(B)$ é o operador AR estacionário. Uma extensão, aparentemente natural da expressão acima, para os processos vectoriais é

$$\Phi_p(B)(I - IB)^d Z_t = \Theta_q(B)a_t$$

ou equivalentemente

$$\Phi_p(B)(1 - B)^d Z_t = \Theta_q(B)a_t$$

Contudo, esta extensão implica que todas as séries componentes sejam diferenciadas o mesmo número de vezes. Esta é uma restrição que pode ser ultrapassada. Assim, assumindo que cada componente Z_t não é estacionária, o processo vectorial reduz-se a um processo estacionário por aplicação do operador de diferenciação, $D(B)$, onde,

$$D(B) = \begin{bmatrix} (1-B)^{d_1} & & & \\ & (1-B)^{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (1-B)^{d_m} \end{bmatrix} \quad \text{com } d_1, d_2, \dots, d_m \in \mathbb{N}.$$

Nestas condições, define-se o modelo VARMA não estacionário, ou integrado, VARIMA(p, d, q):

$$\boxed{\Phi_p(B)D(B)Z_t = \Theta_q(B)a_t}$$

onde os zeros de $|I - \Phi_1 B - \dots - \Phi_p B^p|$ estão fora do círculo unitário.

Diferenciar uma série vectorial pode ser uma tarefa complicada e terá de ser executada com perícia. Na verdade, a sobrediferenciação de alguma das séries componentes poderá levar a maus resultados no modelo ajustado. Assim se justifica a adopção do operador diferença matricial, $D(B)$ em detrimento de $(1 - B)^d$, para estacionarização do processo

vectorial, uma vez que a utilização do mesmo grau de diferenciação para todos os processos univariados, poderia levar a uma sobrediferenciação das suas componentes.

2.10-Processos VARMA e Modelo de Função Transferência

Considere-se o modelo VAR(1), bidimensional:

$$\begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1,t-1} \\ Z_{2,t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,t} \\ a_{2,t} \end{bmatrix} \quad (2.10.1)$$

Se $\phi_{12} = 0$, (2.10.1) pode escrever-se

$$\begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_{11} Z_{1,t-1} \\ \phi_{21} Z_{1,t-1} + \phi_{22} Z_{2,t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,t} \\ a_{2,t} \end{bmatrix}$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} Z_{1,t} - \phi_{11} Z_{1,t-1} = a_{1,t} \\ Z_{2,t} - \phi_{21} Z_{1,t-1} - \phi_{22} Z_{2,t-1} = a_{2,t} \end{cases}$$

usando o operador atraso, tem-se

$$\begin{cases} (1 - \phi_{11}B)Z_{1,t} = a_{1,t} \\ (1 - \phi_{22}B)Z_{2,t} - \phi_{21}BZ_{1,t} = a_{2,t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_{1,t} = \frac{1}{1 - \phi_{11}B} a_{1,t} \\ Z_{2,t} = \frac{\phi_{21}B}{1 - \phi_{22}B} Z_{1,t} + \frac{1}{1 - \phi_{22}B} a_{2,t} \end{cases} \quad (2.10.2)$$

As expressões (2.10.2) mostram que o modelo particular VAR(1) com $\phi_{12} = 0$ poderia, à primeira vista, ser encarado como um modelo de função transferência do tipo (1,0,1), onde $Z_{1,t}$ seria a série *input* e $Z_{2,t}$ a série *output*. No entanto, tal não é verdade. Com efeito, a série *input* $Z_{1,t}$ e a série residual $a_{2,t}$ são, em geral, correlacionadas, contradizendo, desta forma, uma das hipóteses fundamentais dos modelos de função transferência.

Uma das maneiras de reduzir o modelo (2.10.2) a um modelo de função transferência consiste em tomar

$$\begin{cases} a_{1,t} = b_{1,t} \\ a_{2,t} = \alpha a_{1,t} + b_{2,t}, \end{cases}$$

onde α é o coeficiente da regressão de $a_{2,t}$ em $a_{1,t}$. Nestas condições, a teoria da regressão estabelece que,

$$E[b_{2,t}a_{1,t}] = 0, \quad (2.10.3)$$

ou seja, $b_{2,t}$ e $a_{1,t}$ são não correlacionados. Assim, reescrevendo (2.10.2) em função de $b_{2,t}$ virá,

$$\begin{aligned}
 Z_{2,t} &= \frac{\phi_{21}B}{1-\phi_{22}B} Z_{1,t} + \frac{1}{1-\phi_{22}B} a_{2,t} = \frac{\phi_{21}B}{1-\phi_{22}B} Z_{1,t} + \frac{1}{1-\phi_{22}B} (\alpha a_{1,t} + b_{2,t}) = \\
 &= \frac{\phi_{21}B}{1-\phi_{22}B} Z_{1,t} + \frac{\alpha}{1-\phi_{22}B} a_{1,t} + \frac{1}{1-\phi_{22}B} b_{2,t} = \\
 &= \frac{\phi_{21}B}{1-\phi_{22}B} Z_{1,t} + \frac{\alpha}{1-\phi_{22}B} (1-\phi_{11}B) Z_{1,t} + \frac{1}{1-\phi_{22}B} b_{2,t} = \\
 &= \frac{(\phi_{21} - \alpha\phi_{11})B + \alpha}{1-\phi_{22}B} Z_{1,t} + \frac{1}{1-\phi_{22}B} b_{2,t} \tag{2.10.4}
 \end{aligned}$$

Como facilmente se pode observar, tendo em conta (2.10.3), a série residual $b_{2,t}$ é não correlacionada com a série $Z_{1,t}$. A expressão (2.10.4) traduz agora um modelo de função transferência do tipo (1,1,0) em que a série *input* $Z_{1,t}$ é ponderada instantaneamente pelo coeficiente α e pelo coeficiente $(\phi_{21} - \alpha\phi_{11})$ para um período de desfasamento.

O caso tratado, ilustrado através do modelo VAR (1), mostra que os modelos VARMA podem, sob determinadas condições, ser representados como modelos particulares de funções transferência. Faz-se notar, no entanto, que a implicação inversa também é verdadeira, ou seja, qualquer modelo de função transferência admite uma representação VARMA, levando-nos, deste modo, a concluir que os modelos VARMA englobam a classe dos modelos de função transferência. O exemplo seguinte é comprovativo de tal situação.

Tome-se o modelo bivariado de função transferência (1,1,b)(0,1)



$$Y_t = \delta Y_{t-1} + \omega_0 X_{t-b} - \omega_1 X_{t-b-1} + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$$

em que a sucessão input é branqueada pelo VARMA (1,1), $X_t = \Phi_x X_{t-1} + \alpha_t - \theta_x \alpha_{t-1}$.

Este modelo admite a seguinte representação VARMA,

$$\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_x & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{t-1} \\ Y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{t-b} \\ Y_{t-b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{t-b-1} \\ Y_{t-b-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_t \\ \varepsilon_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\theta_x & 0 \\ 0 & -\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{t-1} \\ \varepsilon_{t-1} \end{bmatrix}$$

isto é, está-se em presença de um VARMA $(b+1,1)$ em que as matrizes parâmetros

$$\Phi_2 = \Phi_3 = \dots = \Phi_{b-1} = 0.$$

Capítulo 3

Modelização VARMA

Como se sabe, constitui objectivo essencial da análise de sucessões cronológicas encontrar um “bom modelo” que tenha em conta as relações existentes entre as observações, permitindo, deste modo, a sua descrição.

Para alcançar este objectivo Box e Jenkins (1970) propuseram para o caso univariado, uma metodologia de modelização em três etapas, que acaba de ser generalizada por Tiao e Box em (1979,1981), e em (1981) por Jenkins e Alavi em (1981):

Identificação \Rightarrow Estimação \Rightarrow Avaliação do Diagnóstico

Para a análise de sucessões cronológicas multivariadas será adoptada a mesma metodologia de modelização em etapas. Neste capítulo ir-se-á abordar detalhadamente cada uma delas.

Uma das subetapas da identificação é a estacionarização da série em estudo, constituindo por esta razão o primeiro parágrafo deste capítulo.

3.1- Estacionarização da Sucessão Cronológica

Muitas das sucessões cronológicas observadas, são não estacionárias. Em relação à classe dos processos estacionários até à 2ª ordem, um processo pode ser não estacionário por a média ou variância serem funções do tempo e não constantes como sucede com os processos daquela classe.

Assim, para estabilização da média, à luz do que acontecia para o caso univariado, é usado o operador diferença, aplicando-o a cada uma das séries componentes da série multivariada, Z_t :

$$\nabla Z_{i,t} = (1 - B)Z_{i,t} = Z_{i,t} - Z_{i,t-1}, \quad i = 1, \dots, m,$$

donde resulta

$$\nabla Z_t = (1 - B)Z_t = Z_t - Z_{t-1}.$$

No caso de uma única diferenciação não ser suficiente para estacionarizar a série multivariada, Z_t , ter-se-á de utilizar sucessivas diferenciações:

$$\nabla^d Z_{i,t} = (1 - B)^d Z_{i,t}, \quad i = 1, \dots, m,$$

vindo a série transformada, $\nabla^d Z_t$, onde $d = \max\{d_i\}$, com $i = 1, \dots, m$, e ∇^d é uma matriz diagonal de dimensão $(m \times m)$ cujos elementos genéricos são ∇^{d_i} .

De maneira análoga, a existência de uma tendência periódica nas componentes de Z_t , conduz à utilização da diferenciação sazonal, que facilmente se deduz da anterior substituindo ∇^d por $\nabla_s^{d_s}$ e ∇^d por $\nabla_s^{d_s}$.

A não estacionaridade em variância de uma dada série componente de Z_t , exige a aplicação das transformações de Box e Cox propostas para o caso univariado a cada uma dessas componentes:

$$Z_{i,t}^{(\lambda)_i} = \begin{cases} Z_{i,t}^{\lambda_i} & \text{se } \lambda_i \neq 0 \\ \log Z_{i,t} & \text{se } \lambda_i = 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, m.$$

Assim, quando se referir que o parâmetro de transformação de uma dada série é λ , significa que este é o valor máximo dos diferentes parâmetros λ_i , com $i = 1, \dots, m$.

3.2- Identificação

Esta é a fase mais delicada em todo o processo de modelização de uma série cronológica vectorial, podendo também considerar-se a mais importante.

Da identificação depende o desenrolar de todas as outras fases, em particular, uma boa escolha inicial permite a obtenção de bons resultados na estimação e na avaliação do diagnóstico.

O objectivo desta fase é o de encontrar as ordens p e q de um processo estocástico multivariado VARMA(p, q) de forma que possa ser considerado como o processo gerador da série em estudo.

Encontra-se na bibliografia publicada diversas metodologias para se alcançar o objectivo da identificação. Em P. Telles (1990) são expostas as mais significativas, a saber: identificação para modelos de pequena dimensão, extensões do método de Box e Jenkins, e identificação de uma estrutura simplificada, entre outras.

No entanto, neste trabalho, irá descrever-se a que se julga de maior interesse do ponto de vista prático, uma vez que se trata do método implícito no *software* MTS utilizado nas aplicações realizadas no capítulo 5. Esta metodologia, como se verá adiante, constitui uma extensão da metodologia univariada baseada no comportamento da FAC e FACP estimadas.

Considerando a série vectorial Z_1, Z_2, \dots, Z_n , identifica-se, para a correspondente série estacionária, as ordens p e q de um modelo VARMA, comparando a função matriz de correlação estimada e a função matriz de correlação parcial desfasada estimada com os figurinos teóricos das respectivas funções para os diversos modelos.

Conforme foi exposto no capítulo 2, os figurinos daquelas duas funções matriciais têm o seguinte comportamento genérico para cada uma das três classes de modelos vectoriais:

- a matriz de correlação do modelo vectorial de médias móveis apresenta um corte brusco para a matriz nula em desfasamentos de ordem superior à do processo; enquanto que nos modelos vectoriais com estrutura autoregressiva, aquela matriz decairá exponencialmente para a matriz zero.
- a função matriz de correlação parcial desfasada apresenta como característica global para os modelos VAR um corte brusco para a matriz zero a partir da ordem do processo, enquanto que nos VMA decai de forma exponencial para a matriz nula.
- Os modelos vectoriais mistos, em particular os VARMA(1,1), apresentam ambas as funções matriciais com um decaimento exponencialmente para a matriz zero.

Nestas condições, constitui aspecto essencial na identificação, o reconhecimento dos elementos das correspondentes matrizes estimadas que apresentam valores próximos de zero.

Tendo em conta as propriedades da função matriz de correlação estimada, Tiao e Box (1981) introduziram uma metodologia que permite resumir algumas das características desta função. De acordo com esta metodologia, os autores designam pelos símbolos, +, - e \cdot cada elemento matriz de correlação estimada, segundo o critério seguinte:

+ , representa um valor duas vezes maior que $2s$,

- , representa um valor duas vezes menor que $-2s$,

\cdot , representa um valor compreendido entre $-2s$ e $2s$.

onde s é a estimativa do desvio padrão.

Ou seja, os elementos a que forem atribuídos os símbolos $+$ e $-$ são considerados estatisticamente significativos e os que forem por \cdot serão estatisticamente nulos.

Também para as matrizes de correlação parcial desfasadas estimadas se pode utilizar a metodologia acabada de definir. Sabendo que os elementos das matrizes $\hat{P}(k)$, $\hat{P}_{ij}(k)$, têm uma distribuição assintoticamente normal com média zero e variância $1/n$, os símbolos $+$, $-$ e \cdot , representam, respectivamente, um valor de $\hat{P}_{ij}(k)$ maior que $2/\sqrt{n}$, menor que $-2/\sqrt{n}$, e entre $-2/\sqrt{n}$ e $2/\sqrt{n}$.

3.3- Estimação e Avaliação do Diagnóstico

Depois de identificado o modelo segue-se a fase da estimação dos parâmetros. Como iremos constatar de seguida, os estimadores surgem como soluções de sistemas de equações não lineares, que necessitam de técnicas de análise numérica e de cálculo computacional para o estabelecimento das correspondentes estimativas.

No óptica das aplicações, esta etapa não requer, em geral, grande intervenção da parte do analista, dada a existência de pacotes informáticos que fornecem, uma vez identificado o

modelo, as estimativas dos respectivos parâmetros.

Considere-se identificado o modelo VARMA(p, q):

$$\Phi_p(B)Z_t = \Theta_q(B)a_t.$$

Nestas condições, tomando as observações Z_t ($t = 1, \dots, n$) da sucessão cronológica vectorial, por hipótese já estacionarizada e com média nula, vai, nesta etapa, proceder-se à estimação dos parâmetros:

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p), \quad \Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_q) \quad \text{e} \quad \Sigma.$$

Os procedimentos propostos para a estimação dos parâmetros constituem uma generalização do que se passa para o caso univariado. Apresentam, no entanto, algumas complicações adicionais dado estar-se a trabalhar com vectores m -dimensionais.

Admitindo que as observações $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ foram geradas pelo vector ARMA(p, q) gaussiano de valor médio nulo e de matriz variância-covariância Σ , a função logaritmo da verosimilhança vem dada por (Wei, 1990):

$$\ln L(\Phi, \Theta, \Sigma | Z) = -\frac{nm}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n a_t' \Sigma^{-1} a_t =$$

$$= -\frac{nm}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} \text{tr} \Sigma^{-1} S(\Phi, \Theta) \quad (3.3.1)$$

onde,

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{Z}_t - \Phi_1 \mathbf{Z}_{t-1} - \dots - \Phi_p \mathbf{Z}_{t-p} + \Theta_1 \mathbf{a}_{t-1} + \dots + \Theta_q \mathbf{a}_{t-q}, \quad (3.3.2)$$

$$\text{e } S(\Phi, \Theta) = \sum_{t=1}^n \mathbf{a}_t \mathbf{a}_t'.$$

Uma vez que para $t \leq 0$, \mathbf{Z}_t não é conhecido, pode utilizar-se a função de verosimilhança condicional, vindo o seu logaritmo:

$$\ln L_*(\Phi, \Theta, \Sigma | \mathbf{Z}) = -\frac{n-p}{2} \ln |(2\pi)^m \Sigma| - \frac{1}{2} \text{tr} \Sigma^{-1} S_*(\Phi, \Theta) \quad (3.3.3)$$

onde $S_*(\Phi, \Theta) = \sum_{t=p+1}^n \mathbf{a}_t \mathbf{a}_t'$ e, é assumido que $\mathbf{a}_{p+1-q}, \dots, \mathbf{a}_p$, são nulos. Tal como sucedia

no caso univariado, a maximização da função logaritmo da verosimilhança conduz à resolução de sistemas de equações não lineares, que terão de ser resolvidas através de métodos numéricos.

Nicholls (1976,1977) e Anderson (1980), mostraram que o estimador de máxima verosimilhança, $\hat{\mathbf{h}}$, sendo \mathbf{h} o vector de todos os parâmetros, é não enviesado, consistente e $\sqrt{n}(\hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h})$ é assintoticamente multivariado normal distribuído, i.e., $\sqrt{n}(\hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h}) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma_{\hat{\mathbf{h}}})$.

Após estimado o modelo segue-se a etapa de avaliação do diagnóstico, de forma a avaliar a qualidade estatística do modelo e a capacidade de “explicar” a série em estudo.

No que diz respeito à avaliação da qualidade estatística do modelo é essencial, do ponto de vista da observância do princípio da parcimónia, eliminar os parâmetros que não sejam estatisticamente significativos. Tendo em conta o resultado anteriormente estabelecido quanto à distribuição assintótica dos estimadores obtidos pela máxima verosimilhança, a significância estatística das estimativas pode ser testada através da forma habitual: para cada parâmetro estabelece-se um rácio- t que em módulo deverá ser superior a um determinado valor, dependente do nível de significância pretendido para o teste.

Faz-se notar que o *software* MTS, utilizado nas aplicações constituintes deste trabalho, associa a cada estimativa de um parâmetro o valor do correspondente rácio- t , permitindo assim testar a significância estatística do respectivo valor estimado e, caso seja necessário, eliminar esse parâmetro na estimação final do modelo.

A observância de outros critérios avaliadores da qualidade estatística do modelo deverá, tal como no caso univariado, ser respeitada. Assim, dever-se-à ter em consideração os problemas de redundância, da estacionaridade e da invertibilidade.

Quanto à avaliação da qualidade do ajustamento do modelo à série vectorial, pode ser diagnosticada através da análise da série residual estimada,

$$\hat{a}_t = Z_t - \hat{\Phi}_1 Z_{t-1} - \dots - \hat{\Phi}_p Z_{t-p} + \hat{\Theta}_1 \hat{a}_{t-1} + \dots + \hat{\Theta}_q \hat{a}_{t-q}, \quad (3.3.4)$$

onde $\hat{\Phi}_i$ e $\hat{\Theta}_j$ são as estimativas dos parâmetros Φ_i e Θ_j . Um modelo bem ajustado a série residual \hat{a}_t deve comportar-se como um ruído branco.

Hosking (1980) e Li e Mcleod (1981), propõem que esta análise seja feita com base nas matrizes de correlação estimadas da série residual, usando um teste global de χ^2 . Os elementos destas matrizes não devem ser estatisticamente significativos a não ser para o *lag* zero, caso o modelo se encontre bem ajustado. O *software* MTS permite realizar esta análise.

Se se concluir pela má qualidade do modelo ajustado, o exame das referidas matrizes pode fornecer indicações sobre possíveis melhoramentos a introduzir na reformulação do modelo inicialmente identificado, conduzindo, deste modo, a um novo modelo que será estimado e submetido a uma nova avaliação do diagnóstico.



Capítulo 4

Previsão

A previsão dos valores futuros de uma sucessão cronológica constitui um dos objectivos principais da sua análise.

Assim, supondo que a sucessão cronológica foi observada até ao momento t , Z_1, Z_2, \dots, Z_t , pretende-se com base nestas observações prever o valor no momento $t+m$ ($m > 0$), Z_{t+m} .

Tem-se, então, de escolher a função que, com base nas observações disponíveis, permite obter o previsor.

Mais uma vez se opta por descrever, a generalização ao caso multivariado do método de Box e Jenkins (1976), por ser aquele que será utilizado no capítulo 5 deste trabalho.

Este método tem como objectivo encontrar um previsor linear óptimo e baseia-se na minimização do determinante da matriz de covariância do erro de previsão.

Designando por $e_t(m)$ o vector do erro de previsão, tem-se

$$e_t(m) = Z_{t+m} - \hat{Z}_t(m)$$

onde $\hat{Z}_t(m) = E(Z_{t+m} | Z_t, Z_{t-1}, \dots, Z_1)$ designa o predictor dos mínimos quadrados de origem t e horizonte m .

Como se está a trabalhar na classe dos modelos invertíveis e estacionários VARMA(p, q), estes modelos possuem uma representação VMA(∞) i.é,

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j},$$

onde ψ_j são determinados recorrendo à equação funcional $\Phi(B)\Psi(B) = \Theta(B)$.

Nestas condições, $Z_{t+m} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t+m-j}$, vindo o predictor com origem em t e horizonte m :

$$Z_t(m) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j E(a_{t+m-j}) = \sum_{j=m}^{\infty} \psi_j a_{t+m-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{m+j} a_{t-j}.$$

Note-se que $Z_{t+m} = \sum_{j=0}^{m-1} \psi_j a_{t+m-j} + Z_t(m)$, donde o erro de previsão a m passos virá:

$$e_t(m) = Z_{t+m} - \hat{Z}_t(m) = \sum_{j=0}^{m-1} \psi_j a_{t+m-j},$$

com valor esperado dado pela matriz nula e matriz de covariância :

$$V(e_t(m)) = E[e_t(m).e'_t(m)] = \Sigma + \Psi_1 \Sigma \Psi'_1 + \dots + \Psi_{m-1} \Sigma \Psi'_{m-1}.$$

Tal como no caso univariado, as previsões podem ser geradas a partir da equação do modelo VARMA(p, q):

$$Z_t = \Phi_1 Z_{t-1} + \dots + \Phi_p Z_{t-p} + a_t + \Theta_1 a_{t-1} + \dots + \Theta_q a_{t-q}, \quad (4.1)$$

sendo os vectores a_t processos de ruído branco independentes.

Para o momento $t+1$, tem-se

$$Z_{t+1} = \Phi_1 Z_t + \dots + \Phi_p Z_{t+1-p} + a_{t+1} + \Theta_1 a_t + \dots + \Theta_q a_{t+1-q}. \quad (4.2)$$

Representando por $E^*(Z_{t+1})$ o valor esperado condicional, obtém-se o seguinte resultado:

$$\hat{Z}_t(1) = \Phi_1 E^*(Z_t) + \dots + \Phi_p E^*(Z_{t+1-p}) + E^*(a_{t+1}) + \Theta_1 E^*(a_t) + \dots + \Theta_q E^*(a_{t+1-q}), \quad (4.3)$$

como

$$E^*(Z_{t+m}) = \begin{cases} \hat{Z}_t(m) & m > 0 \\ Z_{t+m} & m \leq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad E^*(a_{t+m}) = \begin{cases} 0 & m > 0 \\ a_{t+m} & m \leq 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

tem-se que

$$Z_{t+1} - \hat{Z}_t(1) = a_{t+1}.$$

De modo análogo, se calcula $Z_{t+2} - \hat{Z}_t(2)$, $Z_{t+3} - \hat{Z}_t(3)$, etc., obtendo-se as relações:

$$Z_t - \hat{Z}_{t-1}(1) = a_t, \quad Z_{t-1} - \hat{Z}_{t-2}(1) = a_{t-1}, \quad Z_{t-2} - \hat{Z}_{t-3}(1) = a_{t-2}, \text{ etc.} \quad (4.5)$$

Substituindo as equações (4.5) em (4.3), encontra-se a expressão geral do previsor, a um passo, com origem no momento t :

$$\hat{Z}_t(1) = \Phi_1 Z_t + \dots + \Phi_p Z_{t+1-p} + \Theta_1 (Z_t - \hat{Z}_t(1)) + \dots + \Theta_q (Z_{t+1-q} - \hat{Z}_{t+q}(1)),$$

ou equivalentemente, supondo $p \geq q$,

$$\begin{aligned} \hat{Z}_t(1) + \Theta_1 \hat{Z}_t(1) + \dots + \Theta_q \hat{Z}_{t+q}(1) &= \\ &= \Phi_p Z_{t+1-p} + (\Theta_1 + \Phi_1) Z_t + \dots + (\Theta_q + \Phi_q) Z_{t+1-q} + \Phi_{q+1} Z_{t-q} + \dots + \Phi_p Z_{t+1-p}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Utilizando a equação (4.6) e conhecendo $\hat{Z}_{t-1}(1), \hat{Z}_{t-2}(1), \dots, \hat{Z}_{t-q}(1), Z_t, Z_{t-1}, \dots, Z_{t+1-p}$, pode calcular-se $\hat{Z}_t(1)$ recursivamente, e ainda actualizar-se a previsão a um passo, introduzindo a observação que se torna disponível em cada período.

De um modo geral, $\hat{Z}_t(m)$ obtém-se, de forma recursiva, a partir dos valores $\hat{Z}_t(1), \hat{Z}_t(2), \dots, \hat{Z}_t(m-1)$ e das observações Z_t, Z_{t-1}, \dots , substituindo em (4.1) os valores futuros de Z_{t+m} pelos seus previsores, $\hat{Z}_t(m)$, e os valores futuros de a_{t+m} pelo seu valor esperado condicional, vector nulo (4.4).

Em resumo, o vector das previsões, $\hat{Z}_t(m)$, é na prática obtido a partir da expressão:

$$\hat{Z}_t(m) = \Phi_1 E^*(Z_{t+m-1}) + \dots + \Phi_p E^*(Z_{t+m-p}) + E^*(a_{t+m}) + \Theta_1 E^*(a_{t+m-1}) + \dots + \Theta_q E^*(a_{t+m-q})$$

estando $E^*(Z_{t+m})$ e $E^*(a_{t+m})$ definidos em (4.4).

Capítulo 5



Aplicações

Este capítulo tem como objectivo comparar a qualidade das previsões obtidas pelos modelos ARMA vectoriais com as dos modelos univariados e as dos modelos de função transferência.

Para tal utilizou-se o *software* estatístico AUTOBOX e MTS, sendo este último específico para o tratamento dos modelos ARMA vectoriais.

Como foi referido, supõe-se no presente trabalho, haver um bom conhecimento sobre a modelização de séries cronológicas univariadas e de função transferência pelo que nos parágrafos relativos a estes modelos se tenha optado por uma sucinta exposição dos resultados.

Ir-se-ão apresentar dois tipos de exemplos. O primeiro, onde é possível utilizar três metodologias de análise: modelização univariada de Box-Jenkins, modelos bivariados de função transferência e modelização de processos ARMA vectoriais. O segundo, pelo facto da existir *feedback* entre as sucessões em estudo, apenas duas metodologias são utilizadas: modelização univariada de Box-Jenkins e modelização de processos ARMA vectoriais.

A análise destes exemplos representa uma primeira tentativa para se responder à seguinte questão:

Conseguirão os modelos VARMA apresentar-se como alternativa melhorada à modelização univariada e à modelização por função transferência?

5.1- Exemplo 1

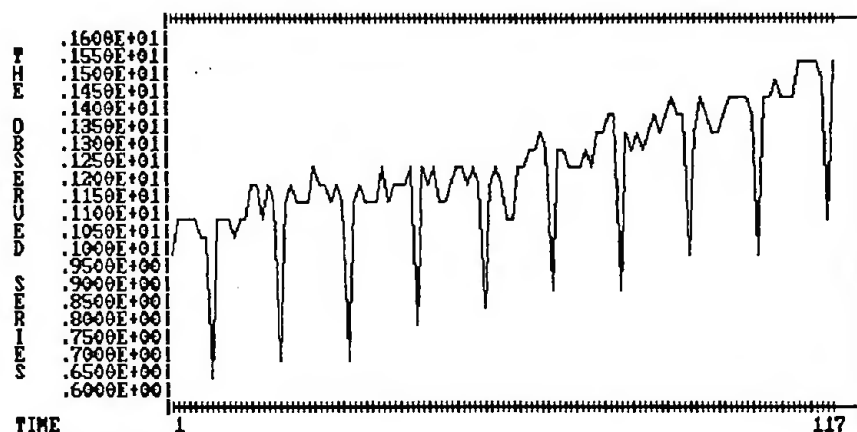
No primeiro exemplo, procede-se ao estudo da série do índice de produção industrial da indústria transformadora (IPTT), no período compreendido entre o mês de Janeiro de 1981 e o mês de Dezembro de 1990, com vista a estabelecer as respectivas previsões através das três metodologias atrás referidas.

Tanto no modelo de função transferência como na modelização ARMA vectoriais, esta sucessão será analisada conjuntamente com a sucessão do volume de vendas de gasolina para igual período de observação. Deste modo, as três metodologias serão confrontadas em termos da qualidade previsional.

Iniciaremos este estudo com a estacionarização das duas séries atrás referidas.

Observando o cronograma da série IPTT, Y_t , (fig. 1), podemos constatar que se trata de uma série com uma forte componente sazonal e não estacionária.

Figura 1
Cronograma da sucessão original, Y_t



Nestas circunstâncias procedeu-se a uma diferenciação simples e a outra sazonal de forma a eliminar a tendência crescente e os movimentos periódicos. O cronograma da série transformada, $Z_t = (1 - B^{12})(1 - B)Y_t$, encontra-se na figura 2, e os gráficos das correspondentes FAC e FACP estimadas nas figuras 3 e 4, respectivamente.

Figura 2
Cronograma da sucessão transformada, Z_t

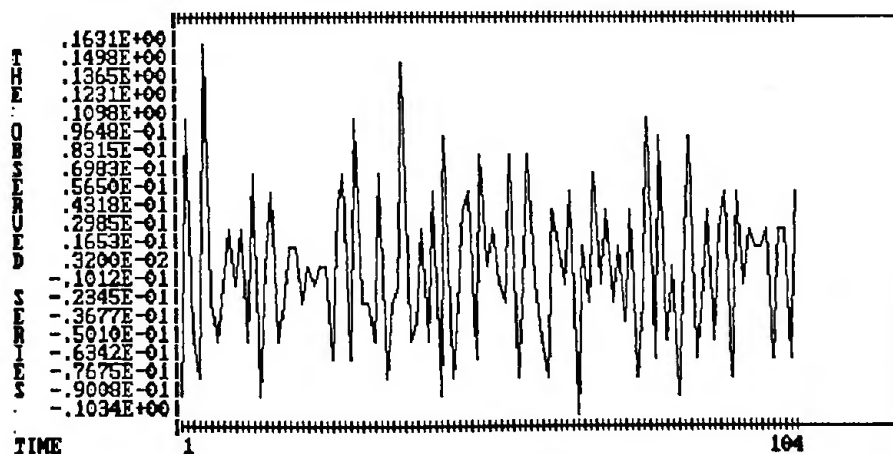


Figura 3
FAC da sucessão transformada, Z_t

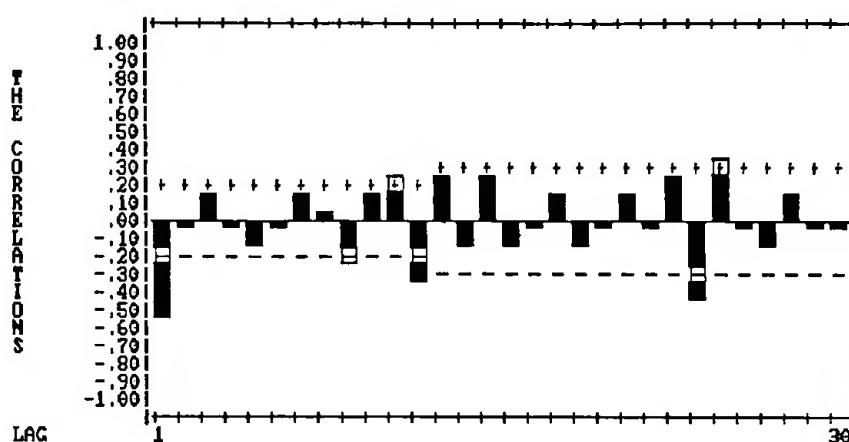
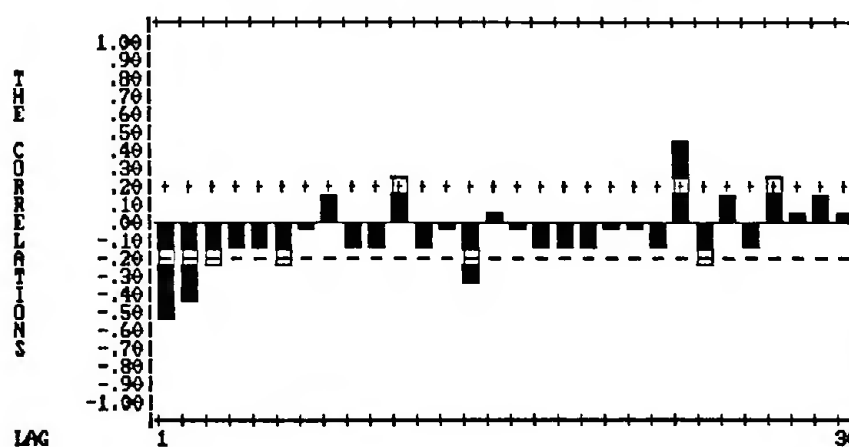


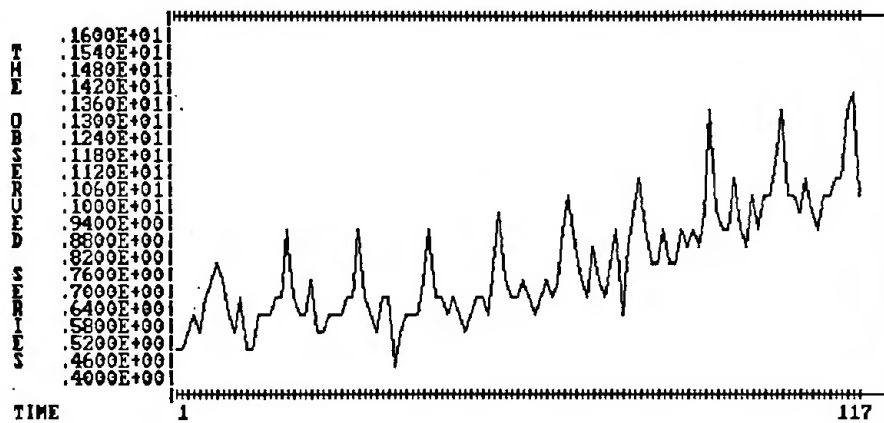
Figura 4
FACP da sucessão transformada, Z_t



A análise das figuras anteriores permite considerar que a série IPIT, após as duas diferenciações, se encontra estacionária.

A série utilizada, para o tratamento conjunto com o IPIT é a série do volume de vendas de gasolina, X_t , cujo cronograma se apresenta:

Figura 5
Cronograma da sucessão original, X_t



Verifica-se nesta série a existência de movimentos periódicos, assim como a não estacionaridade em média e em variância. A estabilização da variância é conseguida através da transformação de Box-Cox com $\lambda = -0.5$, valor sugerido pelo *software* Autobox. À série transformada serão aplicadas uma diferenciação simples e outra sazonal, obtendo-se a série $W_t = (1 - B^{12})(1 - B)(X_t^{-0.5})$, de cronograma, FAC e FACP estimadas representadas nas figuras 6, 7 e 8, respectivamente.

Figura 6
Cronograma da sucessão transformada, W_t

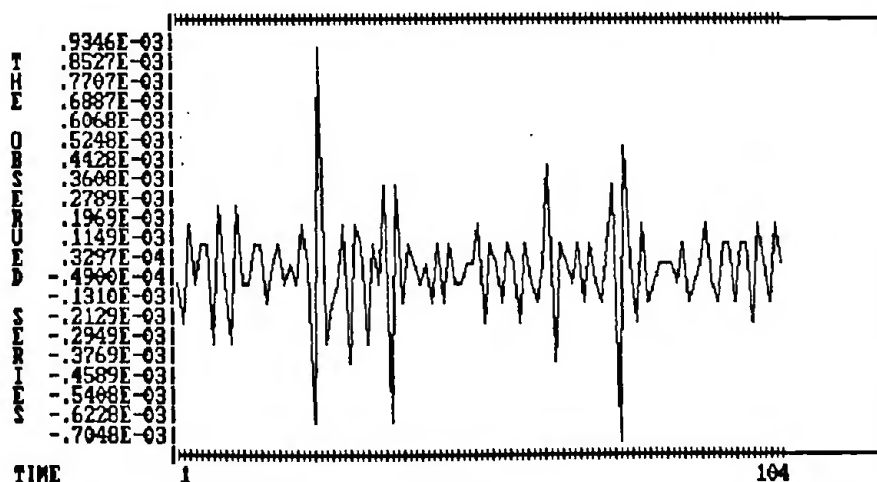


Figura 7
FAC da sucessão transformada, W_t

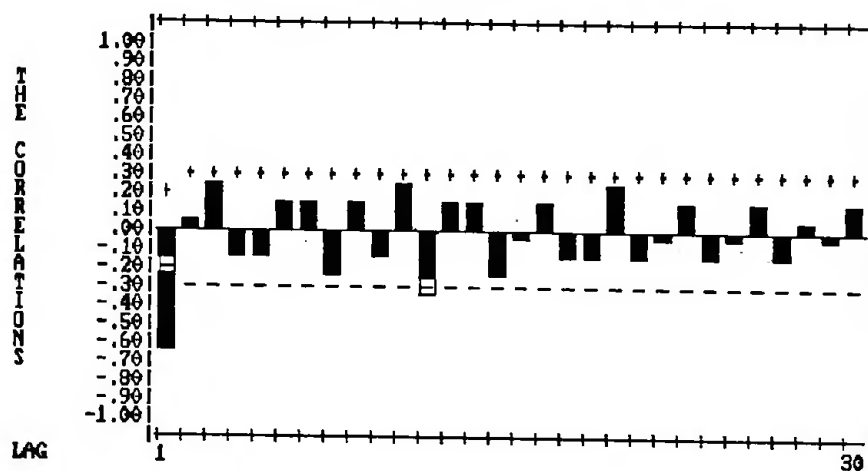
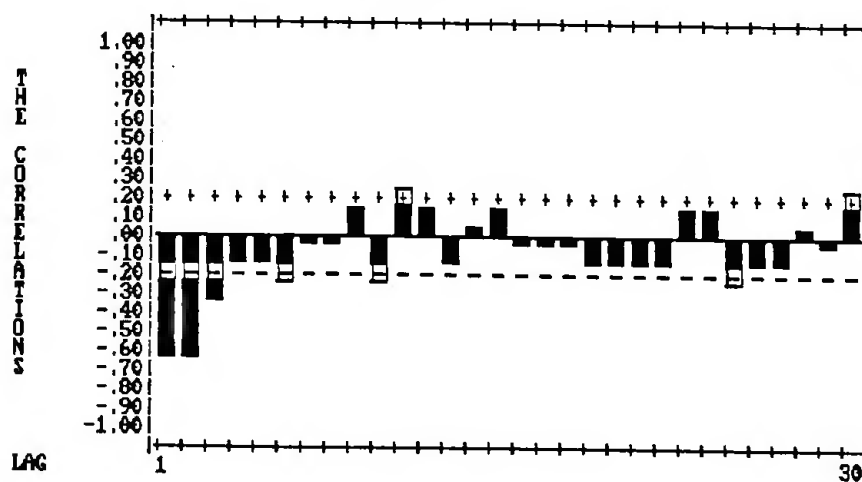


Figura 8
FACP da sucessão transformada, W_t



A análise destes gráficos leva a admitir que se obteve a estacionarização da série volume de vendas da gasolina.

5.1.1 - Modelização Univariada

5.1.1.1- Índice de produção industrial da indústria transformadora

O comportamento da FAC e FACP estimadas da série transformada (figs 3 e 4) permitiu identificar diversos modelos SARIMA, levando a seleccionar, em termos da qualidade de ajustamento e da qualidade das previsões obtidas, o modelo:

$$\text{SARIMA } (0,1,1) (2,1,0)_{12}: (1 - \Phi_{12}B^{12} - \Phi_{24}B^{24})Y_t = (1 - \theta B)\varepsilon_t,$$

cujos valores dos parâmetros estimados são (entre parêntesis apresentam-se os rácios- t associados às estimativas):

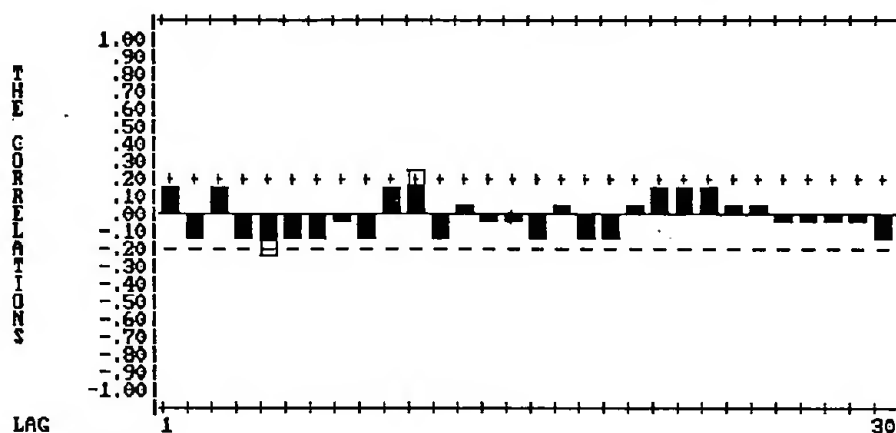
$$\begin{array}{lll} \hat{\Phi}_{12} = -0.53023 & \hat{\Phi}_{24} = -0.72489 & \hat{\theta}_1 = 0.45999 \\ (-.619) & (-10.6) & (5.23) \end{array}$$

Este modelo apresentou significância estatística dos parâmetros estimados, bem como correlações entre estimativas inferior a 0.7. Foram ainda verificadas as suas condições de invertibilidade e de estacionaridade.

Prosseguindo com a avaliação do diagnóstico do referido modelo, verificou-se que se aceita a hipótese de os resíduos serem normalmente distribuídos com média nula e, pode afirmar-se que a sucessão residual comporta-se como um ruído branco.

Com efeito, no que diz respeito à FAC residual estimada, (fig 9 e quadro 1), não se encontra nenhuma estimativa fora das barras de significância;

Figura 9
FAC da série residual do modelo SARIMA(0,1,1)(2,1,0)₁₂



Quadro 1

lag	FAC residual estimada - SARIMA(0,1,1)(2,1,0) ₁₂ (erro padrão)							
1 - 8	.065 (.092)	-.103 (.093)	.062 (.094)	-.137 (.094)	-.161 (.096)	-.070 (.098)	-.113 (.099)	-.022 (.100)
9 - 16	-.071 (.100)	.055 (.100)	.181 (.100)	-.093 (.103)	.007 (.104)	-.034 (.104)	-.024 (.104)	-.090 (.104)
17 - 24	.008 (.105)	-.053 (.105)	-.102 (.105)	.043 (.106)	.137 (.106)	.109 (.107)	.086 (.108)	.031 (.109)
25 - 30	.043 (.109)	-.016 (.109)	-.014 (.109)	-.012 (.109)	-.034 (.109)	-.069 (.109)		

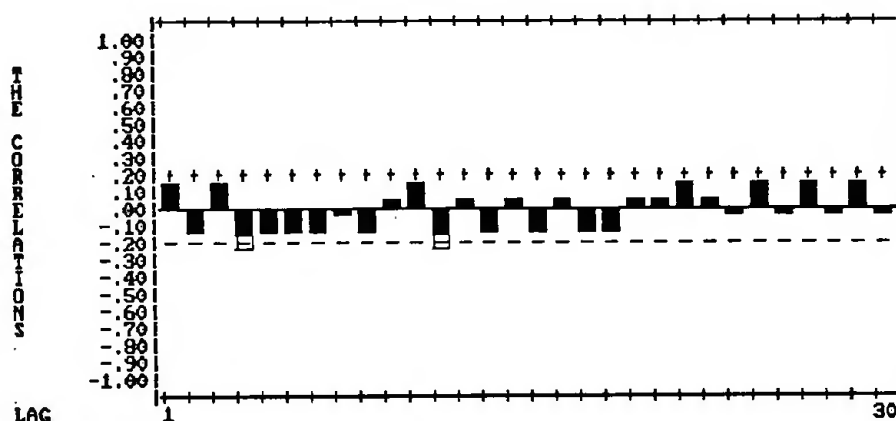
O teste de Bartlett conduz à aceitação da hipótese $H_0: \rho_k(\hat{\varepsilon}) = 0$ para todos os *lag* considerados.

Também o teste de significância conjunta da FAC (teste de Ljung-Box) conduz à aceitação da hipótese: $H_0: \rho_1(\hat{\varepsilon}) = \dots = \rho_{30}(\hat{\varepsilon}) = 0$, a níveis de significância elevados, uma vez que

$$\tilde{Q} = 23.238.$$

Relativamente à FACP da respectiva série residual (fig 10 e quadro 2), a aplicação do teste de Jenkins e Daniels conduz à sucessiva aceitação da hipótese $H_0: \phi_k(\hat{\varepsilon}) = 0$, para $1 \leq k \leq 30$.

Figura 10
FACP da série residual SARIMA(0,1,1)(2,1,0)₁₂



Quadro 2

	FACP residual estimada - SARIMA(0,1,1)(2,1,0) ₁₂ (erro padrão)							
1 - 8	.065 (.092)	-.107 (.092)	.077 (.092)	-.162 (.092)	-.126 (.092)	-.092 (.092)	-.124 (.092)	-.033 (.092)
9 - 16	-.144 (.092)	.028 (.092)	.100 (.092)	-.150 (.092)	.000 (.092)	-.139 (.092)	.033 (.092)	-.149 (.092)
17 - 24	.015 (.092)	-.119 (.092)	-.149 (.092)	.009 (.092)	.007 (.092)	.083 (.092)	.031 (.092)	-.014 (.092)
25 - 30	.080 (.092)	-.033 (.092)	.121 (.092)	-.036 (.092)	.112 (.092)	-.030 (.092)		

Como conclusão pode, portanto, afirmar-se que para o modelo seleccionado, aceita-se a hipótese de a respectiva série residual comportar-se como um ruído branco e, como tal, ser imodelizável. Do ponto de vista de qualidade estatística e de ajustamento este modelo revelou-se bastante aceitável.

As previsões obtidas com o modelo e os respectivos erros absolutos (e.a.) para o período correspondente ao último ano de observações encontram-se no quadro 3.

Quadro 3: Previsão simulada e erro absoluto
série Y_t ($\times 10^2$)

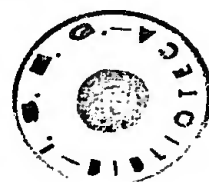
período	obs.	SARIMA (0,1,1)(2,1,0) ₁₂	
		Previsão	e.a.
106	1.4419	1.4657	0.0238
107	1.4768	1.4293	0.0475
108	1.4252	1.3930	0.0322
109	1.4290	1.3807	0.0483
110	1.4742	1.4287	0.0455
111	1.5456	1.4218	0.1238
112	1.5734	1.4818	0.0916
113	1.5272	1.4788	0.0484
114	1.5577	1.5229	0.0348
115	1.5206	1.5082	0.0124
116	1.0754	1.0368	0.0386
117	1.5565	1.4882	0.0683

5.1.1.2 - Volume de vendas de gasolina

De forma análoga à metodologia descrita no ponto 5.1.1.1, procedeu-se à modelização univariada da série do volume de vendas de gasolina, tendo obtido-se o modelo:

$$(1 - B^{12})(1 + 0.63508B + 0.40101B^2)(X_t^{-5}) = (1 + 0.64336B)\varepsilon_t,$$

que mostrou na fase de avaliação de diagnóstico superar os restantes modelos com o qual foi comparado.



5.1.2 - Modelo de Função Transferência

Para encontrar um modelo de função transferência que permita prever a sucessão IPIT, série *output*, utiliza-se a modelização da sucessão *input*, vendas de gasolina, obtida no parágrafo 5.1.1.2 para se proceder ao branqueamento das duas séries, de acordo com teoria associada a esta metodologia.

Transmitida esta informação ao *software* Autobox, o quadro 4 e os gráficos das figuras 11, 12, 13 e 14 permitem proceder à identificação do modelo de função transferência.

Quadro 4

TIME SERIES IDENTIFICATION =====			
STEP 1 OF TRANSFER FUNCTION IDENTIFICATION -- THE ANALYSIS BETWEEN			

INPUT SERIES 1 : G1.PRN			
OUTPUT SERIES : IPIT1.DAT			

THE PREWHITENING MODEL =====			

DATA :	G1.PRN	117	OBSERVATIONS
MODEL DEVELOPED WITH TRANSFORMED DATA = Z(T)** -.500			
DIFFERENCING FACTORS (ORDER,DEGREE) : 1. 1 12. 1			
BACKCASTING : OFF			

PREWHITENING MODEL PARAMETERS			

	TYPE	LAG	COEFFICIENT

1	AUTOREGRESSIVE	1	-.63508E+00
2	AUTOREGRESSIVE	2	-.40101E+00
3	MOVING AVERAGE	1	.64336E+00

THE PREWHITENING MODEL =====			

DATA :	IPIT1.DAT	117	OBSERVATIONS
DIFFERENCING FACTORS (ORDER,DEGREE) : 1. 1 12. 1			
BACKCASTING : OFF			

PREWHITENING MODEL PARAMETERS			

	TYPE	LAG	COEFFICIENT

1	AUTOREGRESSIVE	1	-.63508E+00
2	AUTOREGRESSIVE	2	-.40101E+00
3	MOVING AVERAGE	1	.64336E+00

CROSS-CORRELATION ANALYSIS

=====

```

MEAN OF THE INPUT SERIES      : .45017E-03
STANDARD DEVIATION            : .39997E-01

MEAN OF THE OUTPUT SERIES     : .10048E-02
STANDARD DEVIATION            : .52614E-01

NUMBER OF OBSERVATIONS        : 102

```

THE CROSS-CORRELATIONS

```

LAGS 0- 7  -.126  -.040  .138  .070  .108  .131  .034  .083
STANDARD ERROR (.100) (.101) (.101) (.102) (.102) (.103) (.103) (.104)

LAGS 8- 15  .007  .014  -.189  -.072  .036  .081  -.047  -.077
STANDARD ERROR (.104) (.105) (.105) (.106) (.107) (.107) (.108) (.108)

LAGS 16- 23 -.019  .008  -.047  -.140  -.171  -.304  -.154  .024
STANDARD ERROR (.109) (.110) (.110) (.111) (.112) (.113) (.113) (.114)

LAGS 24- 30 .145  .133  .059  .056  .005  .005  .106
STANDARD ERROR (.115) (.115) (.116) (.117) (.118) (.119) (.120)

```

T-TEST FOR SIGNIFICANCE AT EACH LAG :

```

BOXX IDENTIFIES 3 CROSS CORRELATIONS OUTSIDE 1.500 SIGMA.
LAGS: 10, 20, 21.

```

CROSS-CORRELATION FEEDBACK ANALYSIS

=====

```

(PRELIMINARY TEST OF UNIDIRECTIONAL CAUSALITY)
(I.E. LACK OF FEEDBACK)

```

THE CROSS-CORRELATIONS

```

LAGS 0- 7  -.126  -.113  -.117  -.119  -.006  .010  -.021  -.152
STANDARD ERROR (.100) (.101) (.101) (.102) (.102) (.103) (.103) (.104)

LAGS 8- 15  -.135  -.058  -.133  -.059  .077  .096  .135  .158
STANDARD ERROR (.104) (.105) (.105) (.106) (.107) (.107) (.108) (.108)

LAGS 16- 23 .077  -.068  -.062  .063  .107  .093  .007  -.024
STANDARD ERROR (.109) (.110) (.110) (.111) (.112) (.113) (.113) (.114)

LAGS 24- 30 -.007  .058  .166  .040  -.041  -.044  .003
STANDARD ERROR (.115) (.115) (.116) (.117) (.118) (.119) (.120)

```

T-TEST FOR SIGNIFICANCE AT EACH LAG :

THERE ARE 0 CROSS CORRELATIONS SIGNIFICANT AT 1.500 SIGMA.

THE AUTOCORRELATION AND PARTIAL AUTOCORRELATION ANALYSES OF THE NOISE SERIES

=====

```

MEAN OF THE RESIDUAL SERIES      : .57419E-03
STANDARD DEVIATION              : .50019E-01

NUMBER OF OBSERVATIONS          : 74
MEAN DIVIDED BY THE STANDARD

ERROR OF THE MEAN               : .98751E-01

```


THE AUTOCORRELATIONS

LAGS 1- 8	-.560	.103	.012	-.041	-.028	-.030	.134	-.089
STANDARD ERROR	(.116)	(.148)	(.149)	(.149)	(.149)	(.149)	(.150)	(.151)
Q STATISTIC	24.	25.	25.	25.	25.	25.	27.	27.
P-VALUE	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
LAGS 9- 16	-.042	.027	.098	-.249	.304	-.272	.222	-.057
STANDARD ERROR	(.152)	(.152)	(.152)	(.153)	(.158)	(.166)	(.172)	(.176)
Q STATISTIC	28.	28.	29.	34.	43.	50.	54.	55.
P-VALUE	.001	.002	.003	.000	.000	.000	.000	.000
LAGS 17- 24	-.054	.020	.005	.012	-.046	.053	.087	-.249
STANDARD ERROR	(.176)	(.176)	(.176)	(.176)	(.176)	(.176)	(.177)	(.177)
Q STATISTIC	55.	55.	55.	55.	55.	55.	56.	63.
P-VALUE	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
LAGS 25- 30	.168	.016	-.017	-.020	-.031	.068		
STANDARD ERROR	(.182)	(.184)	(.184)	(.184)	(.184)	(.184)		
Q STATISTIC	67.	67.	67.	67.	67.	67.		
P-VALUE	.000	.000	.000	.000	.000	.000		

T-TEST FOR SIGNIFICANCE AT EACH LAG :
 BOXX IDENTIFIES 1 AUTOCORRELATIONS OUTSIDE 1.960 SIGMA.
 LAGS: 1.

THE PARTIAL AUTOCORRELATIONS

LAGS 1- 8	-.560	-.306	-.135	-.108	-.154	-.223	-.012	.008
STANDARD ERROR	(.116)	(.116)	(.116)	(.116)	(.116)	(.116)	(.116)	(.116)
LAGS 9- 16	-.127	-.179	.041	-.237	.026	-.237	-.016	.087
STANDARD ERROR	(.116)	(.116)	(.116)	(.116)	(.116)	(.116)	(.116)	(.116)
LAGS 17- 24	-.016	-.138	-.011	-.009	-.036	-.075	.184	-.194
STANDARD ERROR	(.116)	(.116)	(.116)	(.116)	(.116)	(.116)	(.116)	(.116)
LAGS 25- 30	.021	-.080	.233	.032	-.055	-.068		
STANDARD ERROR	(.116)	(.116)	(.116)	(.116)	(.116)	(.116)		
BOXX IDENTIFIES 5 PARTIAL AUTOCORRELATIONS OUTSIDE 1.960 SIGMA.								
LAGS: 1, 2, 12, 14, 27.								

As figuras 11 e 12 representam a função de correlação cruzada entre as sucessões branqueadas $\{\alpha_t\}$ e $\{\beta_t\}$ para os lag positivos e negativos, respectivamente.

Figura 11
Correlograma da FCC - lag positivos

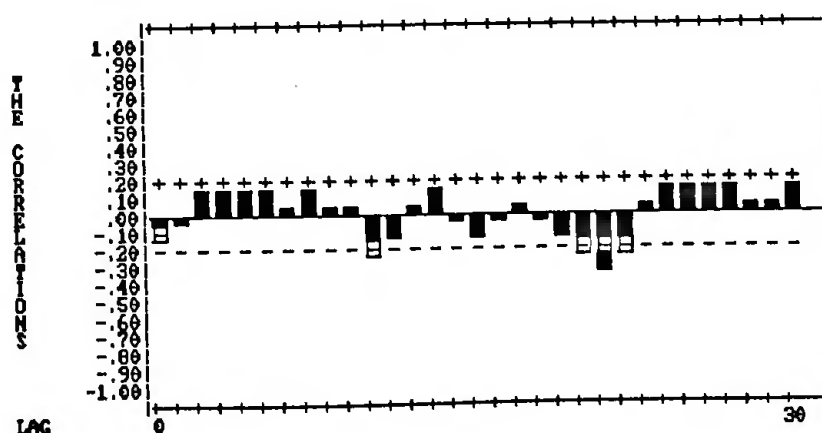
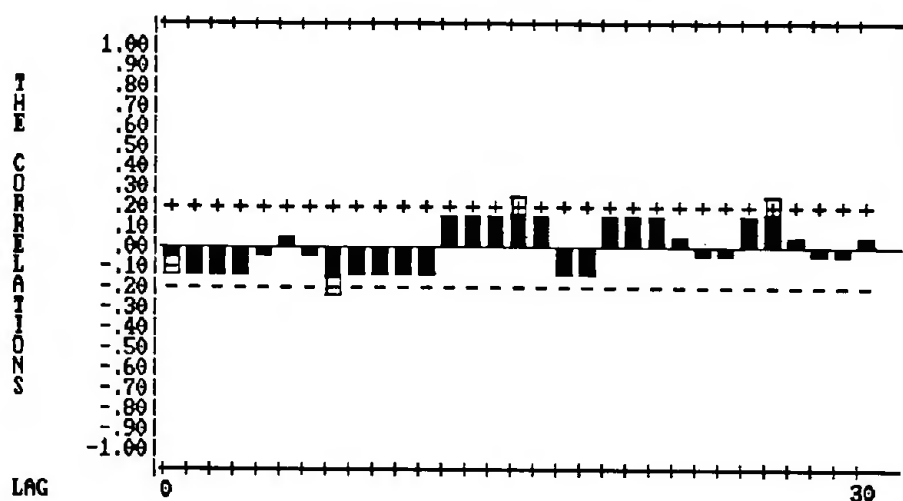


Figura 12
Correlograma da FCC - *lag* negativos



Nas figuras 13 e 14, encontram-se as funções de autocorrelação e de autocorrelação parcial estimada da série residual:

Figura 13
FAC da série *noise*

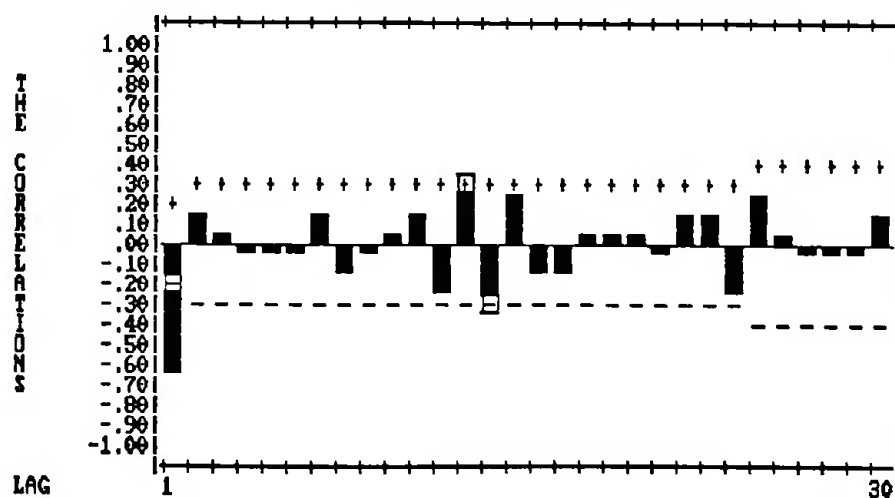
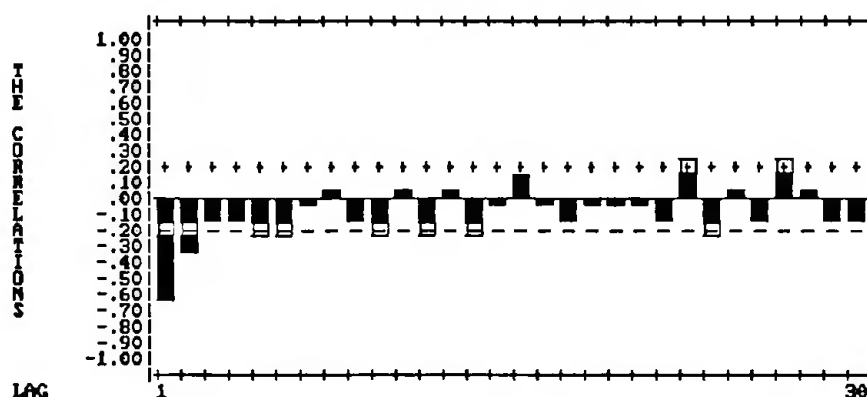


Figura 14
FACP da série *noise*



A análise dos resultados anteriores, quadro 4 e gráficos 11,12,13,14, permite propor o modelo de função transferência $(0,0,10) (1,0) (2,0)_{12}$ ¹:

$$Y_t = w_0 X_{t-10} + (1 - \phi_1 B)^{-1} (1 - \Phi_{12} B^{12} - \Phi_{24} B^{24}) \varepsilon_t \quad (5.1.2)$$

5.1.2.1 - Estimação e avaliação do diagnóstico

Identificado o modelo (5.1.2) e fornecida a correspondente informação ao computador, obtém-se os resultados relativos à fase de estimação e que se apresentam no quadro 5.

Quadro 5
TIME SERIES ESTIMATION
=====

	1	2	3	4
1	1.0000			
2	.0813	1.0000		
3	.0634	.3352	1.0000	
4	.2857	.2387	.1841	1.0000

¹ Optou-se por esta modelização da sucessão residual face aos melhores resultados alcançados, comparativamente com outros modelos, quer a nível de ajustamento quer a nível de previsão.

THE ESTIMATED MODEL

=====

 DATA : Y = IPIT1.DAT 117 OBSERVATIONS
 DIFFERENCING FACTORS (ORDER,DEGREE) : 1, 1 12, 1
 BACKCASTING : OFF

NOISE SERIES

DIFFERENCING FACTORS ON NOISE : NONE

NOISE MODEL PARAMETERS

	FACTOR	LAG	COEFFICIENT	T RATIO
1 AUTOREGRESSIVE	1	1	-.34370E+00	-2.80
2 AUTOREGRESSIVE	2	12	-.53691E+00	-5.35
3 AUTOREGRESSIVE	2	24	-.50820E+00	-5.10

INPUT SERIES 1

DATA - X1 = G1.PRN
 DIFFERENCING FACTORS (ORDER,DEGREE) : 1, 1 12, 1
 MODEL DEVELOPED WITH TRANSFORMED DATA = X1(T)** -.500
 VALUE OF LAG PARAMETER IS 10

TRANSFER FUNCTION PARAMETERS

	FACTOR	LAG	COEFFICIENT	T RATIO
4 INPUT LAG	1	0	-.21960E+00	-2.19

THE RESIDUAL AND MODEL STATISTICS

=====

SUM OF SQUARES :	.99923E-01	DEGREES OF FREEDOM :	65
MEAN SQUARE :	.15373E-02	NUMBER OF RESIDUALS :	69
R SQUARED :	.94116E+00	AKAIKE CRITERIA (AIC):	-.64215E+01
		BAYES CRITERIA (BIC):	-.62920E+01

THE RESIDUAL AUTOCORRELATION AND PARTIAL AUTOCORRELATION ANALYSIS

=====

(THE DIAGNOSTIC CHECK FOR SUFFICIENCY)

MEAN OF THE RESIDUAL SERIES	:	.10762E-02
STANDARD DEVIATION	:	.38039E-01
NUMBER OF OBSERVATIONS	:	69
MEAN DIVIDED BY THE STANDARD	:	
ERROR OF THE MEAN	:	.23501E+00

THE AUTOCORRELATIONS

LAGS 1- 8	-.091	-.189	.106	-.168	-.088	.029	-.007	-.092
STANDARD ERROR	(.120)	(.121)	(.126)	(.127)	(.130)	(.131)	(.131)	(.131)
Q STATISTIC	0.	3.	4.	6.	7.	7.	7.	8.
P-VALUE	.220	.198	.256	.186	.238	.336	.446	.482
LAGS 9- 16	-.144	.090	.152	-.063	.071	-.102	-.043	.062
STANDARD ERROR	(.132)	(.134)	(.135)	(.138)	(.138)	(.138)	(.140)	(.140)
Q STATISTIC	9.	10.	12.	12.	13.	14.	14.	14.
P-VALUE	.418	.452	.378	.433	.480	.486	.549	.595
LAGS 17- 24	.005	-.028	-.146	.073	.033	.089	.091	-.161
STANDARD ERROR	(.140)	(.140)	(.140)	(.142)	(.143)	(.143)	(.144)	(.145)
Q STATISTIC	14.	14.	16.	17.	17.	18.	19.	21.
P-VALUE	.663	.721	.642	.668	.719	.724	.726	.615
LAGS 25- 30	.046	.039	.016	.021	-.136	-.013		
STANDARD ERROR	(.147)	(.147)	(.148)	(.148)	(.148)	(.149)		
Q STATISTIC	22.	22.	22.	22.	24.	24.		
P-VALUE	.657	.699	.746	.786	.722	.765		

T-TEST FOR SIGNIFICANCE AT EACH LAG :

THERE ARE 0 AUTOCORRELATIONS SIGNIFICANT AT 1.960 SIGMA.

THE PARTIAL AUTOCORRELATIONS

LAGS 1- 8	-.091	-.199	.070	-.198	-.094	-.076	-.025	-.141
STANDARD ERROR	(.120)	(.120)	(.120)	(.120)	(.120)	(.120)	(.120)	(.120)
LAGS 9- 16	-.233	-.027	.087	-.060	.008	-.184	-.007	-.028
STANDARD ERROR	(.120)	(.120)	(.120)	(.120)	(.120)	(.120)	(.120)	(.120)
LAGS 17- 24	-.014	-.101	-.204	.042	-.060	.092	-.024	-.181
STANDARD ERROR	(.120)	(.120)	(.120)	(.120)	(.120)	(.120)	(.120)	(.120)
LAGS 25- 30	.094	-.019	.104	-.094	-.138	.061		
STANDARD ERROR	(.120)	(.120)	(.120)	(.120)	(.120)	(.120)		

THERE ARE 0 PARTIAL AUTOCORRELATIONS SIGNIFICANT AT 1.960 SIGMA.

CROSS-CORRELATION ANALYSIS

=====

THE CROSS-CORRELATIONS

(A DIAGNOSTIC CHECK FOR TRANSFER MODEL SUFFICIENCY)

INPUT SERIES : PREWHITENED G1.PRN

OUTPUT SERIES : THE ESTIMATED RESIDUALS FROM THE TRANSFER FUNCTION MODEL

MEAN OF THE INPUT SERIES	:	-.16766E-02
STANDARD DEVIATION	:	.35514E-01
NUMBER OF OBSERVATIONS	:	69

THE CROSS-CORRELATIONS

LAGS 0- 7	-.160	.107	.053	-.099	.131	-.080	.052	.118
STANDARD ERROR	(.122)	(.123)	(.124)	(.125)	(.126)	(.127)	(.128)	(.129)
LAGS 8- 15	.068	-.115	-.069	.008	-.043	-.094	-.097	-.007
STANDARD ERROR	(.130)	(.131)	(.132)	(.134)	(.135)	(.136)	(.137)	(.139)
LAGS 16- 23	.015	.157	.019	.044	-.061	-.111	-.079	.125
STANDARD ERROR	(.140)	(.141)	(.143)	(.144)	(.146)	(.147)	(.149)	(.151)
LAGS 24- 29	.093	-.039	-.121	.113	.036	.083		
STANDARD ERROR	(.152)	(.154)	(.156)	(.158)	(.160)	(.162)		

T-TEST FOR SIGNIFICANCE AT EACH LAG :

THERE ARE 0 CROSS CORRELATIONS SIGNIFICANT AT 1.960 SIGMA.

THE CROSS-CORRELATIONS

(THE DIAGNOSTIC CHECK FOR UNIDIRECTIONAL CAUSALITY)
(I.E. LACK OF FEEDBACK)INPUT SERIES : THE ESTIMATED RESIDUALS FROM THE TRANSFER FUNCTION MODEL
OUTPUT SERIES : PREWHITENED G1.PRN

THE CROSS-CORRELATIONS

LAGS 0- 7	-.160	.069	-.040	.132	.031	.075	.089	-.045
STANDARD ERROR	(.122)	(.123)	(.124)	(.125)	(.126)	(.127)	(.128)	(.129)
LAGS 8- 15	-.189	.120	-.108	-.253	.080	-.036	-.010	.362
STANDARD ERROR	(.130)	(.131)	(.132)	(.134)	(.135)	(.136)	(.137)	(.139)
LAGS 16- 23	.185	-.096	-.090	.056	-.152	.036	.005	.015
STANDARD ERROR	(.140)	(.141)	(.143)	(.144)	(.146)	(.147)	(.149)	(.151)
LAGS 24- 29	-.020	-.165	.190	.068	-.084	.129		
STANDARD ERROR	(.152)	(.154)	(.156)	(.158)	(.160)	(.162)		

T-TEST FOR SIGNIFICANCE AT EACH LAG :

BOXX IDENTIFIES 1 CROSS CORRELATIONS OUTSIDE 1.960 SIGMA.
LAGS: 15,

Nas figuras 15 e 16, têm-se os gráficos das funções de autocorrelação e de autocorrelação parcial da sucessão residual $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ e a figura 17 e 18 representa o gráfico da correlação entre a sucessão branqueada $\{\hat{\alpha}_t\}$ e os resíduos $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ para os *lag* positivos e negativos.

Figura 15
FAC da série residual

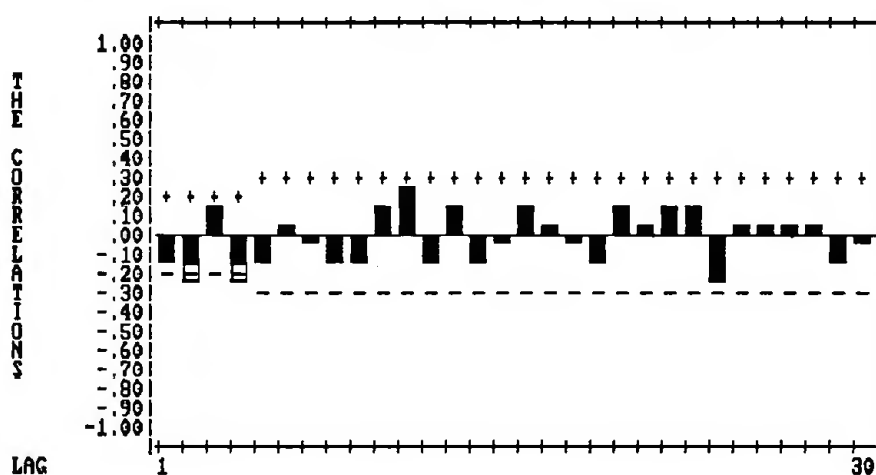


Figura 16
FACP da série residual

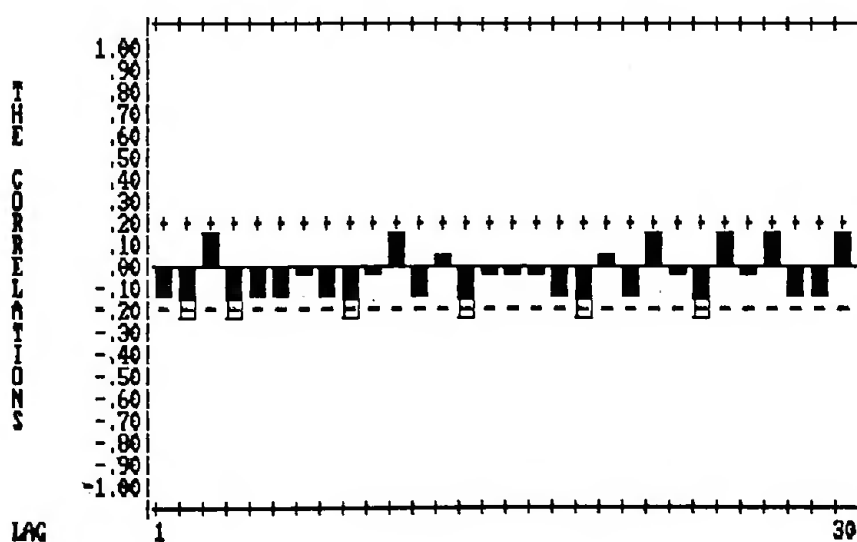


Figura 17
FCC entre o *input* e os resíduos (*lag* positivos)

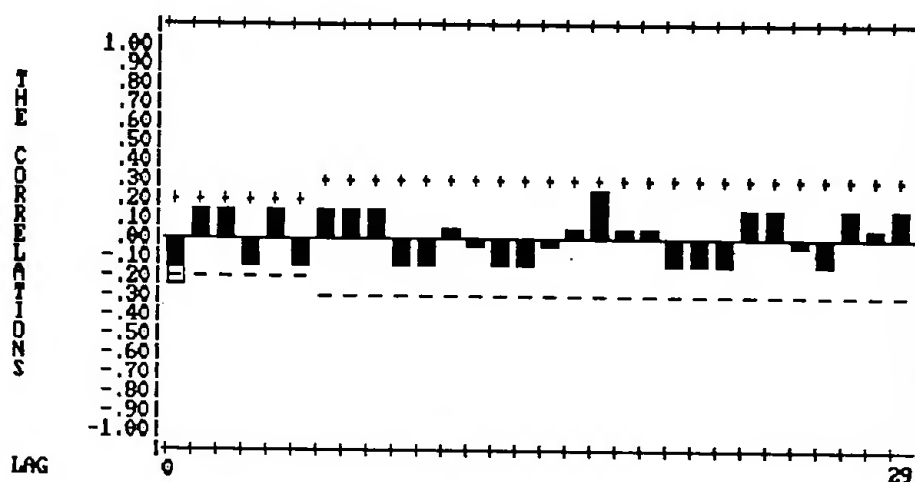
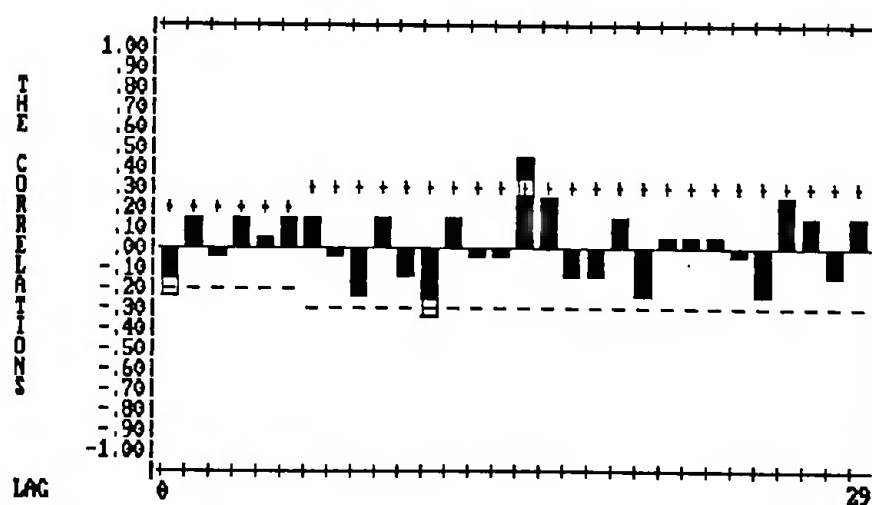


Figura 18
FCC entre o *input* e os resíduos (*lag* negativos)



A análise dos resultados computacionais e dos gráficos anteriormente referidos, permite concluir:

a) O modelo (5.1,2) tem como parâmetros estimados:

$$\hat{\phi}_1 = -0.3437 \quad \hat{\phi}_{12} = -0.53691 \quad \hat{\phi}_{24} = -0.50820 \quad w_0 = -0.2196$$

Estas estimativas são significativamente diferentes de zero ao nível de 5%, uma vez que os correspondentes rácio- t são em módulo todos superiores a 1.96.

b) Os elementos da matriz de correlação entre os parâmetros estimados são inferiores e módulo a 0.7, dizendo-se, por isso, que se está perante um modelo estável.

c) A sucessão branqueada $\{\hat{\alpha}_t\}$ e a série residual $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ podem-se considerar não correlacionados, (figuras 17 e 18), verificando-se, deste modo, a satisfação da hipótese fundamental do modelo.

d) Os resíduos $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ comportam-se como um ruído branco. Com efeito, a FAC e a FACP residuais encontram-se dentro dos limites de confiança referentes à nulidade destas funções.

e) Quanto à estatística de Ljung-Box, toma o valor $\tilde{Q} = 21,3257$, manifestamente inferior ao quantil $\chi^2_{(27)}(0.95) = 40.1133$ significando que os resíduos se comportam globalmente como um ruído branco.

Tendo-se concluído pela aceitação do modelo (0,0,10) (1,0) (2,0)₁₂ com os parâmetros acima indicados e depois de ter procedido à sua comparação com outros modelos

“vizinhos”, optou-se por avançar para a previsão com este modelo, tendo-se obtido os resultados seguintes:

Quadro 6: Previsão simulada e erro absoluto
série Y_t ($\times 10^2$)

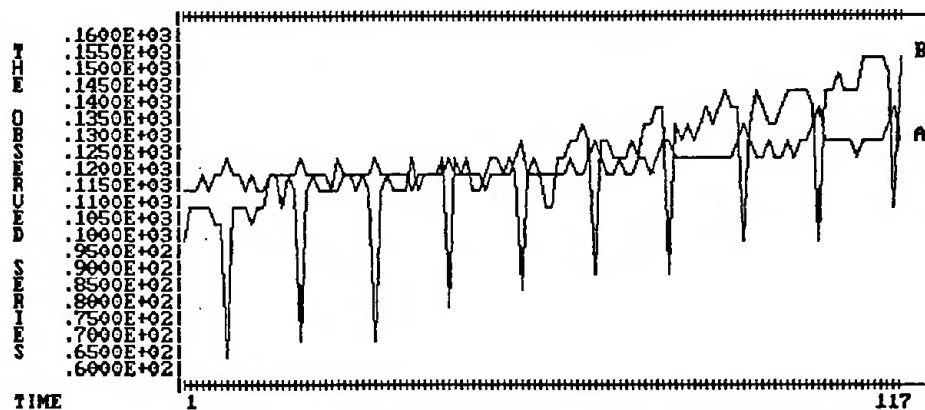
período	obs.	(0,0,10) (1,0) (2,0) ₁₂	
		Previsão	e.a
106	1.4419	1.4703	0.0284
107	1.4768	1.4452	0.0316
108	1.4252	1.4092	0.0160
109	1.4290	1.4112	0.0178
110	1.4742	1.4318	0.0424
111	1.5456	1.4524	0.0932
112	1.5734	1.4991	0.0743
113	1.5272	1.4967	0.0305
114	1.5577	1.5184	0.0393
115	1.5206	1.4962	0.0244
116	1.0754	1.0592	0.0162
117	1.5565	1.495	0.0615

5.1.3 Modelização ARMA vectorial

Como já foi referido, o *software* que permitiu modelizar os modelos ARMA vectoriais, é o MTS, implementado por Automatic Forecasting Systems, Inc., AFS, que tem como instrumentos de identificação as matrizes de correlação e as matrizes de correlação parcial desfasadas sugeridas por Heyse e Wei (1985 a,b) descritas no capítulo 1 deste trabalho.

Seja $Z_{1,t}$ a série do volume de vendas de gasolina (VVG) e $Z_{2,t}$ a série IPIT. O cronograma conjunto das duas séries, pode ver-se na figura 19:

Figura 19
 Cronograma conjunto das séries de VVG (A) e IPIT (B)



A análise vectorial destas séries exige a sua estacionarização prévia, a qual é alcançada através das transformações referidas no início do capítulo.

Procedida a diferenciação, os resultados da estimação das funções matrizes de correlação e das funções matrizes de correlação parcial desfasada apresentam-se nos quadros 7 e 8, respectivamente:

Quadro 7: matrizes de correlação estimadas

	1	2	3	4
$\hat{\rho}(k)$	$\begin{bmatrix} -.61 & .14 \\ -.09 & -.49 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} .01 & -.05 \\ .25 & -.02 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} .20 & -.04 \\ -.18 & .08 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -.06 & .06 \\ -.01 & -.02 \end{bmatrix}$
k	5	6	7	8
$\hat{\rho}(k)$	$\begin{bmatrix} -.11 & -.08 \\ .13 & -.05 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} .06 & .15 \\ -.11 & -.04 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} .11 & -.11 \\ .06 & .11 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -.18 & -.08 \\ -.07 & .02 \end{bmatrix}$
k	9	10	11	12
$\hat{\rho}(k)$	$\begin{bmatrix} .12 & .22 \\ .15 & -.17 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -.11 & -.15 \\ -.15 & .07 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} .23 & -.05 \\ .00 & .20 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -.28 & .13 \\ .04 & -.31 \end{bmatrix}$

Quadro 8
Função matriz de correlação parcial desfasada estimada

k	$\hat{P}(k)$	
1	$\begin{bmatrix} -.61 & -.09 \\ .14 & -.49 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & . \\ . & - \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} -.57 & .18 \\ .10 & -.34 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & + \\ . & - \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} -.35 & .08 \\ -.01 & -.17 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & . \\ . & - \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} -.08 & .00 \\ -.01 & -.08 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . & . \\ . & . \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} -.07 & .09 \\ -.14 & -.09 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . & . \\ . & . \end{bmatrix}$
6	$\begin{bmatrix} -.21 & .01 \\ .10 & -.20 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & . \\ . & - \end{bmatrix}$
7	$\begin{bmatrix} .03 & .10 \\ .09 & -.01 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . & . \\ . & . \end{bmatrix}$
8	$\begin{bmatrix} -.04 & .02 \\ -.19 & .08 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . & . \\ - & . \end{bmatrix}$
9	$\begin{bmatrix} .07 & .16 \\ .02 & -.10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . & + \\ . & . \end{bmatrix}$
10	$\begin{bmatrix} -.14 & .08 \\ .02 & -.10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . & . \\ . & . \end{bmatrix}$
11	$\begin{bmatrix} .02 & -.06 \\ -.11 & .19 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} + & . \\ . & + \end{bmatrix}$
12	$\begin{bmatrix} .08 & -.09 \\ -.08 & -.08 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . & . \\ . & . \end{bmatrix}$

A análise destas duas funções matriciais leva a identificar um modelo VARMA misto. Na verdade, não se encontram cortes bruscos para a matriz nula em ambas as funções matrizes a partir de um dos primeiros *lags* iniciais.

Deste modo, tal como sucedia na identificação dos modelos mistos univariados realizada com base no comportamento da FAC e FACP estimadas, a selecção de um determinado modelo misto vectorial torna-se também problemática e terá de ser feita por tentativas até se encontrar um modelo parcimonioso que satisfaça os critérios de avaliação do diagnóstico.

Tendo em conta que, tanto a matriz de correlação como a de correlação parcial desfasada estimadas anulam-se a partir do *lag* $k=3$ e tornam-se significativas para *lags* mais elevados, inicia-se o processo de pesquisa de um modelo misto por um VARMA (3,3). Os resultados de estimação deste modelo encontram-se no quadro 9, que, como se pode verificar, apresenta as matrizes $\hat{\Theta}_1$ e $\hat{\Theta}_2$ nulas, sendo todas as outras estatisticamente significativas:

Quadro 9: Estimação do modelo VARMA (3,3)

	Estimativas	<i>rácio-t</i>
$\hat{\Phi}_1$	$\begin{bmatrix} -1.156 & 0 \\ 0 & -.776 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -12.19 & .00 \\ .00 & -8.02 \end{bmatrix}$
$\hat{\Phi}_2$	$\begin{bmatrix} -.905 & 0 \\ 0 & -.583 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -7.58 & .00 \\ .00 & -4.98 \end{bmatrix}$
$\hat{\Phi}_3$	$\begin{bmatrix} -.345 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.63 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\hat{\Theta}_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\hat{\Theta}_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\hat{\Theta}_3$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & .4145 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3.07 \end{bmatrix}$

Os valores das matrizes de correlação da correspondente série residual deste modelo estimado encontram-se no quadro 10 e a sua análise permite proceder ao estudo da qualidade do ajustamento de tal modelo, de acordo com o que foi estabelecido no parágrafo 3.3.

Quadro 10: matrizes de correlação estimadas da série residual do modelo VARMA (3,3)

	1	2	3	4
$\hat{\rho}(k)$	$\begin{bmatrix} -.11 & -.07 \\ -.02 & .05 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -.09 & -.05 \\ .19 & .06 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -.11 & -.1 \\ -.04 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -.04 & .02 \\ .06 & -.01 \end{bmatrix}$
k	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ + & \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$
	5	6	7	8
$\hat{\rho}(k)$	$\begin{bmatrix} .04 & .08 \\ .08 & -.08 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} .05 & .1 \\ -.01 & -.07 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} .07 & -.16 \\ .1 & .1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -.13 & -.11 \\ 0 & -.04 \end{bmatrix}$
k	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$
	9	10	11	12
$\hat{\rho}(k)$	$\begin{bmatrix} .07 & .04 \\ .04 & -.19 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -.02 & -.15 \\ -.25 & .04 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} .16 & .04 \\ .03 & .03 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -.15 & .09 \\ .15 & -.31 \end{bmatrix}$
k	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & - \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ - & \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & - \end{bmatrix}$

A observação do quadro 10 no que diz respeito às matrizes constituídas pelos símbolos +, - e \cdot , leva a identificar os elementos $\hat{\rho}_{21}(2)$, $\hat{\rho}_{22}(7)$, $\hat{\rho}_{22}(9)$, $\hat{\rho}_{21}(10)$ e $\hat{\rho}_{22}(12)$ como sendo os únicos estatisticamente significativos, podendo-se, deste modo, considerar que o modelo apresenta alguma qualidade de ajustamento e será, por esta razão, utilizado na obtenção de previsões. Contudo, na perspectiva de encontrar outros modelos alternativos que superem o anterior em termos das previsões obtidas e que tenham igualmente uma qualidade razoável no que diz respeito ao ajustamento, procedeu-se ao incremento das ordens p e q e analisaram-se os resultados respectivos.

Após vários ensaios, selecciona-se o modelo VARMA(2,10) de matrizes parâmetro

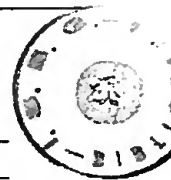
$$\hat{\Theta}_2 = \hat{\Theta}_4 = \hat{\Theta}_5 = \hat{\Theta}_6 = \hat{\Theta}_7 = \hat{\Theta}_8 = 0,$$

cujos resultados da estimação estão no quadro 11 e mostram que todas as outras matrizes parâmetro são significativas.

Quadro 11: Estimação do modelo VARMA (2,10)

	Estimativas	<i>rácio-t</i>
$\hat{\Phi}_1$	$\begin{bmatrix} -.583 & 0 \\ 0 & -.763 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5.29 & 0 \\ 0 & -8.14 \end{bmatrix}$
$\hat{\Phi}_2$	$\begin{bmatrix} -.359 & 0 \\ .257 & -.536 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4.03 & 0 \\ 2.63 & -4.97 \end{bmatrix}$
$\hat{\Theta}_1$	$\begin{bmatrix} .706 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\hat{\Theta}_3$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -.357 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2.09 & 3.00 \end{bmatrix}$
$\hat{\Theta}_9$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & .208 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1.86 \end{bmatrix}$
$\hat{\Theta}_{10}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ .255 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2.29 & 0 \end{bmatrix}$

O comportamento dos resíduos deste modelo pode ser verificado pelo quadro 12, onde se detectam como significativos os elementos $\hat{\rho}_{12}(2)$, $\hat{\rho}_{22}(7)$, $\hat{\rho}_{11}(12)$ e $\hat{\rho}_{22}(12)$. Tal como sucedia com o modelo VARMA(3,3) podemos também considerar que o modelo VARMA(2,10) apresenta uma razoável qualidade de ajustamento.



Quadro 12: matrizes de correlação estimadas da série residual
do modelo VARMA (2,10)

	1	2	3	4
$\hat{\rho}(k)$	$\begin{bmatrix} -.02 & -.05 \\ -.03 & .05 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} .08 & -.17 \\ -.07 & .09 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} .05 & -.13 \\ .01 & -.03 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} .09 & -.02 \\ -.05 & .00 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot & - \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$
k	5	6	7	8
$\hat{\rho}(k)$	$\begin{bmatrix} -.01 & .02 \\ -.07 & -.08 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} .08 & .08 \\ .02 & -.02 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} .14 & -.14 \\ -.04 & .18 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -.12 & -.11 \\ -.13 & -.02 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & + \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$
k	9	10	11	12
$\hat{\rho}(k)$	$\begin{bmatrix} .09 & -.09 \\ -.01 & -.02 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} .00 & -.11 \\ -.03 & .07 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} .14 & -.04 \\ -.07 & .07 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -.16 & .08 \\ .14 & -.23 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & \cdot \\ \cdot & - \end{bmatrix}$

As previsões obtidas com os dois modelos e os correspondentes erros absolutos (e.a.) sobre o período correspondente ao último ano de observação encontram-se no quadro 13:

Quadro 13: Previsão simulada e erro absoluto
série Y_t , ($\times 10^2$)

período	obs.	VARMA (3,3)		VARMA (2,10)	
		Previsão	e.a.	Previsão	e.a.
106	1.4419	1.4706	.0287	1.4886	.0467
107	1.4768	1.4568	.02	1.4815	.0047
108	1.4252	1.4166	.0086	1.4272	.0020
109	1.4290	1.3898	.0392	1.4196	.0094
110	1.4742	1.4239	.0503	1.4365	.0377
111	1.5456	1.4824	.0632	1.4990	.0466
112	1.5734	1.4775	.0959	1.5111	.0623
113	1.5272	1.4916	.0356	1.5157	.0115
114	1.5577	1.4990	.0587	1.5023	.0554
115	1.5206	1.4370	.0836	1.4489	.0717
116	1.0754	1.0615	.0139	1.0780	.0026
117	1.5565	1.4929	.0636	1.5012	.0553

Estamos agora em condições de comparar os resultados obtidos, em termos de previsões, por cada uma das metodologias utilizadas neste exemplo, a saber, modelação ARMA univariada, modelação por função transferência e modelação ARMA vectorial. Com tal objectivo calculou-se, para cada uma delas, o erro quadrático médio (EQM) de previsão e o erro absoluto percentual (EAP), cujos resultados são apresentados nos quadros 14 e 15, respectivamente:

Quadro 14: EQM

Modelo	Erro quadrático Médio
Univariado SARIMA (0,1,1)(2,1,0) ₁₂	.003485
Função Transferência (0,0,10) (1,0) (2,0) ₁₂	.002124
VARMA (3,3)	.002874
VARMA (2,10)	.001765

Quadro 15: Erro absoluto percentual

Período	SARIMA (0,1,1)(2,1,0) ₁₂	Fç transf. (0,0,10)[(1,0)(2,0)] ₁₂	VARMA (3,3)	VARMA (2,10)
106	1.65	1.97	1.99	3.24
107	3.22	2.14	1.35	..32
108	2.26	1.12	.60	.14
109	3.38	1.25	2.74	.66
110	3.09	2.88	3.41	2.56
111	8.01	6.03	4.09	3.02
112	5.82	4.72	6.10	3.96
113	3.17	2.00	2.33	.75
114	2.23	2.52	3.77	3.56
115	.82	1.60	5.50	4.72
116	3.59	1.51	1.29	.24
117	4.39	3.95	4.09	3.55

A observação destes últimos quadros permite concluir que o modelo VARMA (2,10) é o que apresenta um menor erro quadrático médio de previsão, batendo significativamente todos os modelos considerados. Nota-se também que a modelação univariada foi a que produziu as piores previsões, o que mostra, que neste exemplo, é vantajosa a utilização de modelos multivariados para o estabelecimento de previsões. Em particular, este exemplo faz realçar as potencialidades da modelação ARMA vectorial, que permitiu reduzir em cerca de 17% o EQM obtido pela modelação por função transferência.

Quanto ao erro absoluto percentual pode dizer-se que o modelo VARMA (2,10) perde na previsão a um passo, comparativamente com os restantes modelos, já que apresenta para esta um erro superior aos outros, no entanto, as restantes previsões são globalmente mais próximas do verdadeiro valor absoluto.

5.2 - Exemplo 2

Neste segundo exemplo, procedeu-se ao estudo da série do volume de importações (I_t), no período compreendido entre Janeiro de 1977 e Dezembro de 1993 em dados trimestrais.

Com o objectivo de ajudar a explicar esta série, trabalhou-se com a sucessão cronológica do volume do consumo alimentar (C_t), para igual período.

Os cronogramas de cada sucessão apresentam-se nas figuras 20 e 21:

Figura 20
Cronograma da sucessão original, I_t

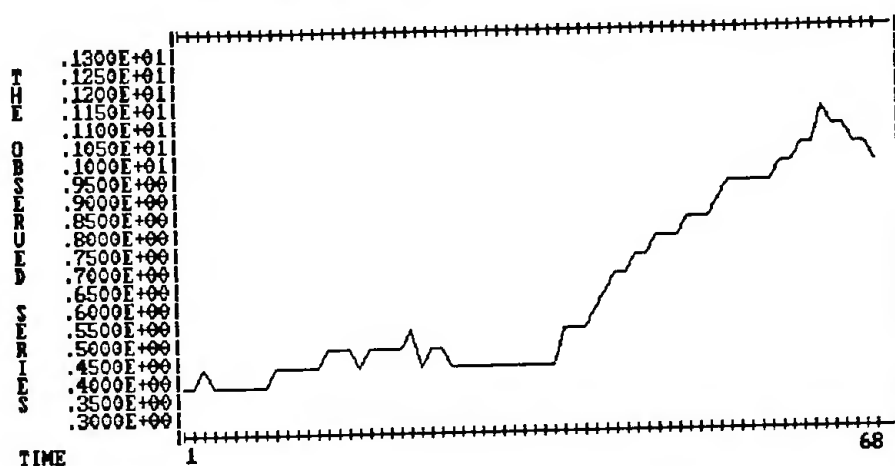
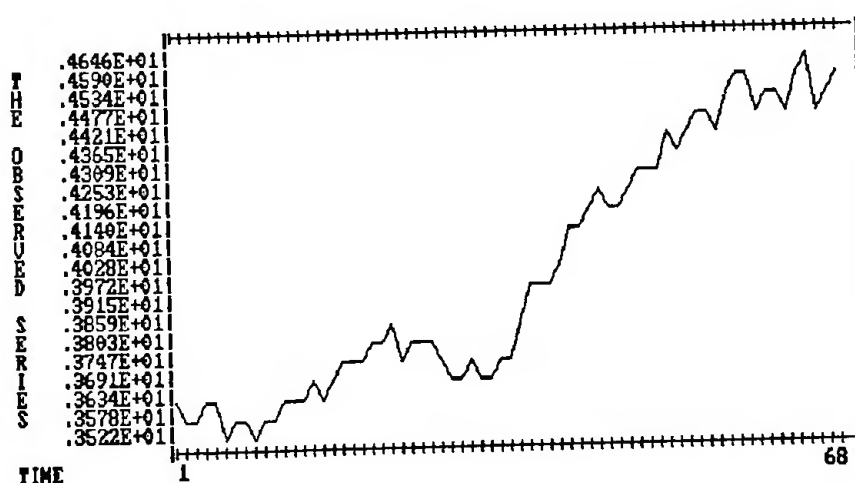


Figura 21
Cronograma da sucessão original, C_t



Não foi possível encontrar um modelo de função transferência que permitisse descrever conjuntamente as duas sucessões, já que existe um forte *feedback* entre as duas séries, como se pode verificar pela função de correlação cruzada para os *lag* negativos, (fig. 22).

Figura 22
Correlograma da FCC - lag positivos

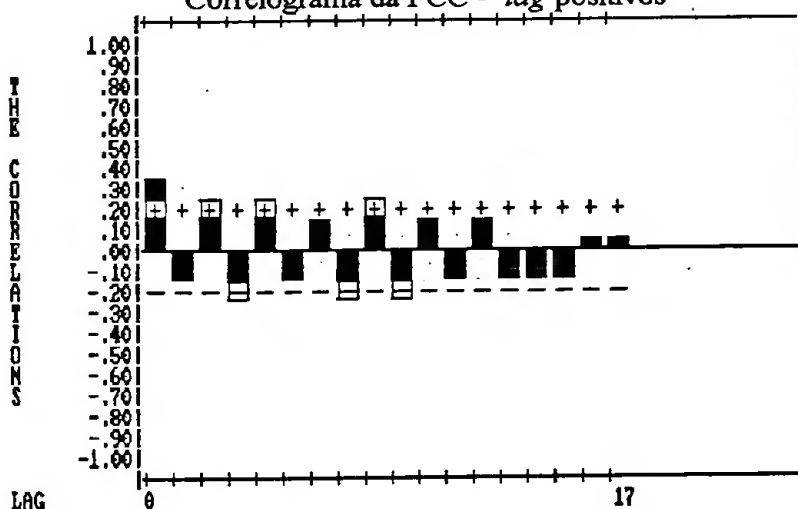
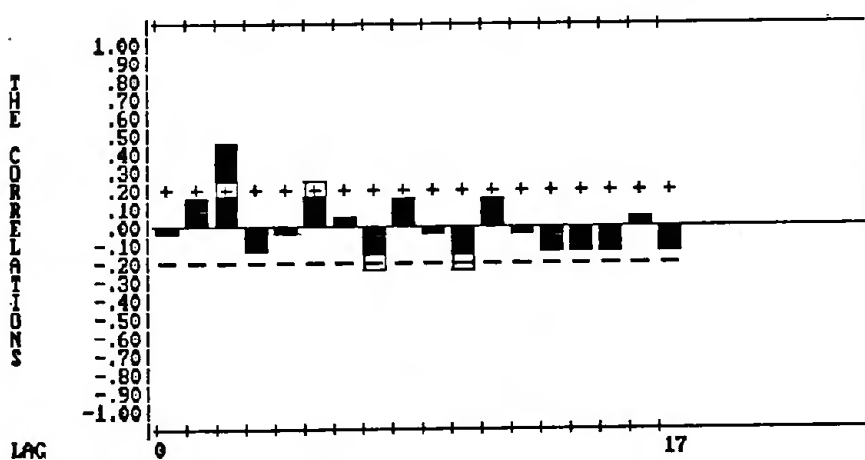


Figura 23
Correlograma da FCC - lag negativos



O modelo univariado que melhores resultados produziu foi o autoregressivo de 1ª ordem:

$$(1 + 0.2482 B)I_t = a_t$$

cujos resultados da previsão e erro absoluto para os últimos oito períodos de observações, se apresentam no quadro 16.

Quadro 16: Previsão simulada e erro absoluto
série I_t , ($\times 10^3$)

período	obs.	AR (1)	
		Previsão	e.a.
61	1.0655	0.98632	0.07918
62	1.0703	0.98447	0.08583
63	1.1357	0.98493	0.15077
64	1.0778	0.98481	0.09299
65	1.1035	0.98484	0.11866
66	1.0396	0.98483	0.05477
67	1.0539	0.98483	0.06907
68	1.0148	0.98484	0.02996

Depois de estacionarizar as séries, de forma análoga à do exemplo 1, observou-se as matrizes funções de correlação e de correlação parcial desfasada estimadas, quadros 17 e 18, para proceder à modelização vectorial:

Quadro 17
Matrizes de correlação estimadas

	1	2	3	4
$\hat{\rho}(k)$	$\begin{bmatrix} -.10 & .10 \\ .04 & -.32 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -.28 & .36 \\ .5 & -.01 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} .15 & .00 \\ .10 & .11 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -.04 & .22 \\ .06 & .06 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} . & . \\ . & - \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . & + \\ + & . \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . & . \\ . & . \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . & + \\ . & . \end{bmatrix}$
k	5	6	7	8
$\hat{\rho}(k)$	$\begin{bmatrix} .02 & .01 \\ -.13 & -.07 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} .02 & .03 \\ .04 & -.04 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} .03 & -.11 \\ -.10 & -.01 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -.05 & .03 \\ -.01 & -.10 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} . & . \\ . & . \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . & . \\ . & . \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . & . \\ . & . \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . & . \\ . & . \end{bmatrix}$
k	9	10	11	12
$\hat{\rho}(k)$	$\begin{bmatrix} -.36 & -.21 \\ -.15 & .06 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} .12 & .05 \\ -.08 & .15 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} .00 & -.07 \\ .15 & -.03 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -.12 & -.08 \\ .09 & .04 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} - & - \\ . & . \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . & . \\ . & . \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . & . \\ . & . \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . & . \\ . & . \end{bmatrix}$

Quadro 18
Função matriz de correlação parcial desfasada estimada

k	$\hat{P}(k)$	
1	$\begin{bmatrix} -.10 & .04 \\ .10 & -.32 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . & . \\ . & . \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} -.27 & .46 \\ .29 & .10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & + \\ + & . \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} .30 & -.16 \\ -.17 & .13 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} + & . \\ . & . \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} .12 & -.01 \\ .18 & .10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . & . \\ . & . \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} -.16 & .10 \\ .08 & -.13 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . & . \\ . & . \end{bmatrix}$
6	$\begin{bmatrix} .15 & .05 \\ -.06 & .15 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . & . \\ . & . \end{bmatrix}$
7	$\begin{bmatrix} .06 & -.14 \\ -.06 & -.03 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . & . \\ . & . \end{bmatrix}$
8	$\begin{bmatrix} -.13 & .09 \\ .15 & -.07 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . & . \\ . & . \end{bmatrix}$
9	$\begin{bmatrix} -.26 & -.08 \\ -.20 & .03 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & . \\ . & . \end{bmatrix}$
10	$\begin{bmatrix} .21 & -.12 \\ .02 & .13 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} + & . \\ . & . \end{bmatrix}$
11	$\begin{bmatrix} -.02 & .06 \\ -.03 & -.26 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . & . \\ . & - \end{bmatrix}$
12	$\begin{bmatrix} -.28 & .12 \\ -.04 & .15 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & . \\ . & . \end{bmatrix}$

Também aqui, e de forma análoga à já exposta no primeiro exemplo a observação destes quadros conjuntamente com a estimação e avaliação do diagnóstico permitiu a selecção de dois modelos: VARMA (2,1) e VAR(9), cujos resultados da estimação se apresentam, quadros 19 e 20, respectivamente:

Quadro 19: Estimação do modelo VARMA (2,1)

	Estimativas	<i>rácio-t</i>
$\hat{\Phi}_1$	$\begin{bmatrix} 0 & .0077 \\ 6.9809 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2.12 \\ 1.95 & 0 \end{bmatrix}$
$\hat{\Phi}_2$	$\begin{bmatrix} -.2907 & .0176 \\ 10.0874 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.76 & 4.85 \\ 2.91 & 0 \end{bmatrix}$
$\hat{\Theta}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & .4148 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2.99 \end{bmatrix}$

Quadro 20: Estimação do modelo VAR (9)

	Estimativas	<i>rácio-t</i>
$\hat{\Phi}_1$	$\begin{bmatrix} 0 & .0062 \\ 0 & -.3170 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1.74 \\ 0 & -2.89 \end{bmatrix}$
$\hat{\Phi}_2$	$\begin{bmatrix} -.2480 & .0158 \\ 11.8255 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.54 & 4.63 \\ 3.46 & 0 \end{bmatrix}$
$\hat{\Phi}_3$	$\begin{bmatrix} .2156 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.05 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\hat{\Phi}_4$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6.9677 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2.02 & 0 \end{bmatrix}$
$\hat{\Phi}_9$	$\begin{bmatrix} -.2712 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.77 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ambos os modelos apresentaram uma série residual com comportamento de ruído branco, pelo que se calculou as previsões e o respectivo erro absoluto para os últimos oito períodos de observações com os dois modelos:

Quadro 21: Previsão simulada e erro absoluto
série I_t , ($\times 10^3$)

período	obs.	VARMA (2,1)		VAR (9)	
		Previsão	e.a.	Previsão	e.a.
61	1.0655	1.0045	0.061	1.0553	0.0102
62	1.0703	0.96459	0.10571	1.0042	0.0661
63	1.1357	0.99035	0.14535	1.0666	0.0691
64	1.0778	1.0211	0.0567	1.0462	0.0316
65	1.1035	1.0326	0.0709	1.0669	0.0366
66	1.0396	1.0453	.0057	1.0929	0.0533
67	1.0539	1.0783	0.0244	1.1408	0.0869
68	1.0148	1.109	0.0942	1.1288	0.114

Quadro 22: EQM

Modelo	Erro quadrático Médio
Univariado	.00847
VARMA (2,1)	.00672
VAR (9)	.00437

Quadro 23: Erro absoluto percentual (e.a.p)

Período	AR(1)	VARMA (2,1)	VAR (9)
61	7.43	5.73	0.96
62	8.02	9.88	6.18
63	13.28	12.80	6.08
64	8.63	5.26	2.93
65	10.75	6.43	3.32
66	5.27	0.55	5.13
67	6.55	2.31	8.25
68	2.95	9.28	11.23

Embora o e.a.p seja menor na previsão a um passo para a modelização univariada, o erro absoluto percentual médio é muito superior ao da modelização VARMA, tal como o EQM. Pode por isso afirmar-se que, também neste exemplo é notória a supremacia dos modelos ARMA vectoriais em detrimento dos univariados.

Conclusão

Ao analisar os resultados pode concluir-se que, de facto, no âmbito dos exemplos apresentados, a modelação conjunta de sucessões potenciou a capacidade de descrever quer a série do índice de produção industrial da industria transformadora quer a série do volume de importações, tendo-se obtido ganhos significativos em termos previsionais.

Os modelos vectoriais ARMA, generalização dos modelos univariados, produziram neste trabalho efeitos práticos, o que na verdade nem sempre acontece a todas as metodologias quando aplicadas à resolução de problemas concretos.

No entanto, deve referir-se que a fase de identificação na modelização VARMA, tal como acontecia para os casos univariado e de função transferência, é primordial e reveste-se, para os primeiros, de dificuldade acrescida, dado ter como instrumentos funções matriciais, obrigando a uma atenção redobrada que por vezes pode desincentivar a sua utilização.

Deve, no entanto, sempre que possível tentar-se a modelização ARMA vectorial, já que em primeira instância tem a grande vantagem de poder superar a existência de *feedback* entre as séries a tratar conjuntamente.

Bibliografia



Bartlett, M. S. (1978), *An Introducting to Stochastic Processes with Special Reference to Methods and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge.

Box, G. E. P. e Cox, D. R. (1964), An Analysis of Transformations, *Journal of the Royal Statistical Society B*, 26, 211-252.

Box, G. E. P. e Jenkins, G. M. (1970), *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day, San Francisco, California.

Box, G. E. P. e Jenkins, G. M. (1976), *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, 2ª Ed., Holden-Day, San Francisco, California.

Brockwell, P. J. e Davis, R. A. (1987), *Time Series: Theory and Methods*, Springer-Verlag, Nova Iorque.

Chatfield, C. (1989), *The Analysis of Time Series: An Introduction*, Chapman and Hall, Londres.

Dunsmuir, W. e Hannan, E. J. (1976), Vector Linear Time Series Models, *Advances in Applied Probability* 8, 339-364.

Granger, C. W. J. e Newbold, P. (1986), *Forecasting Economic Time Series*, Academic Press, San Diego.

Hannan, E. J. (1969a), The Identification of Vector Mixed Autoregressive-Moving Average Systems, *Biometrika* 56, 223-225.

Hannan, E. J. (1969b), The Estimation of Mixed moving Autoregressive Systems, *Biometrika* 56, 579-593.

Hannan, E. J. (1970), *Multiple Time Series*, John Wiley and Sons, Nova Iorque.

Hannan, E. J. (1975), The Estimation of ARMA Models, *Annals of Statistics* 3, 975-981.

Hannan, E. J. (1978), Multivariate ARMA Theory, Stability and Inflation - A Volume of Essays to Honour the Memory of A. W. H. Philips, Eds. A. R. Bergstrom, A. J. L. Catt, M. H. Peston e B. D. J. Silverstone, John Wiley and Sons, Nova Iorque, 201-212.

Hannan, E. J., Dunsmuir, W. e Deistler, M. (1980), Estimation of Vector ARMAX Models, *Journal of Multivariate Analysis* 10, 275-295.

Hannan, E. J. e Kavalieris, L. (1984), Multivariate Linear Time Series Models, *Advances in Applied Probability* 16, 492-561.

Haugh, L. D. e Box, G. E. P. (1977), Identification of Dynamic Regression (Distributed Lag) Models Connecting Two Time Series, *Journal of American Statistical Association* 72, 121-130.

Heyse, J. F. e Wei, W. W. S. (1985 a), *The partial lag autocorrelation function*, tech. Report #32, Department of Statistics, Temple University.

Heyse, J. F. e Wei, W. W. S. (1985 b), Inverse and partial lag autocorrelation for vector time series, *ASA Proceedings of Business and Economic Statistics Section*, 233-237.

Hillmer, S. C. e Tiao, G. C. (1979), Likelihood Function of Stationary Multiple Autoregressive Moving Average Models, *Journal of American Statistical Association* 74, 652-661.

Hosking, J. R. M. (1980), The multivariate portmanteau statistic, *J. Amer. Statist. Assoc.*, 75, 602-607.

Jenkins, G. M. e Alavi, A. S. (1981), Some Aspects of Modelling and Forecasting Multivariate Time Series, *Journal of Time Series Analysis* 2, 1-47.

- Kendall, M. G., Stuart, A. e Ord, J. K., *The Advanced Theory of Statistics*, vol. 3, Charles Griffin & Co. Ltd, Londres.
- Koreisha, S. G. e Pukkila, T. M. (1987), Identification of Nonzero Elements in the Polynomial Matrices of Mixed VARMA Processes, *Journal of the Royal Statistical Society B*, 112-116.
- Li, W. K. e McLeod, A. I. (1981), Distribution of the residual autocorrelations in multivariate ARMA time series models, *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, 43, 231-239.
- Lütkepohl, H. (1982a), Differencing Multiple Time Series: Another Look at the Canadian Money and Income Data, *Journal of Time Series Analysis* 3, 235-243.
- Lütkepohl, H. (1985), Comparison of Criteria for Estimating the Order of a Vector Autoregressive Process, *Journal of Time Series Analysis* 6, 35-52.
- Murteira, B. J. F., Müller, D. A. e Turkman, K. F. (1993), *Análise de Sucessões Cronológicas*, MC Graw-Hill, Lisboa.
- Pankratz, A. (1983), *Forecasting with Univariate Box - Jenkins Models*, John Wiley and Sons, Nova Iorque.
- Parzen, E. (1962), *Stochastic Processes*, Holden-Day, San Francisco.



Tiao, G. C. e Box, G. E. P. (1979), *An Introduction to Applied Multiple Time Series Analysis*, Technical Report N° 582, Department of Statistics, University of Wisconsin.

Tiao, G. C. e Box, G. E. P. (1981), Modelling Multiple Time Series with Applications, *Journal of the American Statistical Association* 76, 802-816.

Teles, P. J. F. C. (1990), *Modelização de séries cronológicas multivariadas*, Dissertação de Mestrado, Instituto Superior de Economia e Gestão - U. T. L.

Tiao, G. C. e Tsay, R. S. (1983), Multiple Time Series Modeling and Extended Sample Cross-Correlations, *Journal of Business and Economic Statistics* 1, 43-56.

Wei, W. W. S. (1990), *Time Series Analysis, univariate and multivariate methods*, Addison-Wesley publishing company.

Whittle, P. (1953), The Analysis of Multiple Stationary Time Series, *Journal of the Royal Statistical Society B*, 15, 125-139.